DIETER HETZEL

ÜBER REGULÄRE GRAPHISCHE DARSTELLUNG VON AUFLÖSBAREN GRUPPEN

Diplomarbeit 1976
Technische Universität Berlin
Fachbereich Mathematik

Inhalt

Anmerkung 3
Einleitung 5
1 ALLGEMEINES 9
2. Cayley-Graphen 15
3.Die Gruppe A(G,H) 23
4. Die Gruppe Aut(G,H) 30
5. Isomorphie von Cayley-Graphen 34
II. CAYLEY-GRAPHEN VON GRUPPENERWEITERUNGEN 37
6. Zyklische Erweiterungen von Gruppen 37
7. Die Stabilitätsklassen 46
8. Die Automorphismengruppe der erweiterten Graphen 54
9. Der Hauptsatz über Erweiterungen von Gruppen, die eine GRR besitzen. 63
III. DER CAYLEY INDEX DER ABELSCHEN UND DER GDC-GRUPPEN 70
10. Der Cayleyindex der abelschen Gruppen 72
11. Der Cayleyindex der GDC-Gruppen 93
IV. Untersuchung der Erw. der abelschen und GDC-Gruppen 95
12. Erweiterungen der abelschen Gruppen 95
13. Erweiterungen der GDC-Gruppen 100
V. DER CAYLEYINDEX EINIGER "KLEINER" GRUPPEN 103
14. Der Cayleyindex der nichtabelschen, nicht-GDC-Gruppen, ... 103
15. Der Cayleyindex einiger anderer Gruppen 119
Beweis: 123
16. Der Cayleyindex von Erweiterungen von kleinen Gruppen, ... 131
IV. DER HAUPTSATZ ÜBER DAS GRR-PROBLEM FÜR AUFLÖSBARE GR. 139
17. Der Hauptsatz 139
ANHANG 1 141
Anhang 2: Computerprogramme 152
Literatur 156
INDEX 158
Beweisstruktur 160
Diplom-Zeugnis 162
Lebensläufe der für diese Arbeit relevanten Professoren 165

Anmerkung

Diese Datei ist ein Remake der Diplomarbeit aus dem Jahr 1976 mit den heutigen Mitteln.

Die Diplomarbeit wurde mit den seinerzeit üblichen Hilfsmitteln erstellt. Der Text wurde mit einer mechanischen Schreibmaschine erstellt. Hoch- und Tiefstellungen konnten durch Drehen der Walze um eine Raste erzielt werden. Die vielen nicht auf der Schreibmaschinentastatur vorhandenen Zeichen (griechische Buchstaben, mathematische Zeichen) wurden nachträglich handschriftlich eingesetzt. Ferner wurden die Seitenzahlen und die Nummern der mathematischen Aussagen (Sätze und Lemmas) nachträglich handschriftlich eingesetzt.

Das in Papierform vorliegende Exemplar der Diplomarbeit im Umfang von 370 Seiten wurde jetzt eingescannt und mit der OCR-Funktion des Programms Adobe-Finereader digitalisiert. Die handschriftlich eingesetzten Zeichen und auch die hoch- und tiefgestellten Zeichen wurden vom verwendeten Programm leider nur unzureichend erkannt. Es war deshalb in großem Umfang Nacharbeit erforderlich.

Der Text der Diplomarbeit wurde in der Originalform belassen. Das betrifft auch die Rechtschreibung. Das Layout wurde jedoch angepasst. Die Verwendung der Schriftart Arial Schriftgröße 12 mit einem Zeilenabstand von 1,5 lieferte ein wesentlich kompakteres Layout.

Für die Diplomarbeit wurden auch Berechnungen auf der Zentralrechenanlage der TU Berlin durchgeführt. Die Programmerstellung erfolgte damals noch auf Lochkarten. Nachdem die Lochkarten erstellt worden waren, wurde das Programm als Lochkartenstapel an der Zentralrechenanlage abgegeben. An einem der nächsten Tage konnte dann der vom Programm erzeugte Ausdruck abgeholt werden.

Die nächste Seite zeigt die eingescannte Seite 29 der Diplomarbeit.

Unter *Orbit (Transitivitätsgebiet,Transitivitätssystem)* eines Elements der x der Gruppe G verstehen wir die Menge O(G,x) $=\{ gx | g \in G\}$

2.17 SATZ:

Seien G_1 und G_2 zwei Gruppen. Sei $H \in G_1 \cap G_2$, so daß H eine Cayleymenge sowohl von G_1 als auch von G_2 ist.

Für $i = 1, 2$ sei definiert:

$W_i = W(G_i,H)$ und $X_i = X(G_i,H)$.

Sei $n \in \mathbb{N}$.

Ist dann $W_1^{(n+1)} = W_2^{(n+1)}$, so sind die Graphen $X_1^{(\frac{n}{2})}$ und $X_2^{(\frac{n}{2})}$ isomorph.

Beweis:

Sei $W_1^{(n+1)} = W_2^{(n+1)}$. Für $i = 1,2$ sei $Y_i = X_i^{(\frac{n}{2})}$.

Für alle $x \in V(Y_i)$ ist $d(x,e) \leq \frac{1}{2}(n+1)$ ($i = 1,2$) .

Also gibt es Elemente $h_1,h_2,\ldots,h_r \in H$, so daß $x = h_1h_2\ldots h_r$ und $r = d(x,e)$ ist.

Sei $\varepsilon : V(Y_1) \longrightarrow V(Y_2)$ definiert durch $\varepsilon(e) = e$ und $\varepsilon(h_1h_2\ldots h_r) = h_1h_2\ldots h_r$ für alle $h_i \in H$ $(1 \leq i \leq r)$ und alle r mit $1 \leq r \leq \frac{1}{2}(n+1)$. Dann ist ε eine wohldef. Abb..

Ist nämlich $x = h_1h_2\ldots h_r = k_1k_2\ldots k_s$ mit $h_i,k_j \in H$ und $r,s \leq \frac{1}{2}(n+1)$, so ist $w : k_s^{-1}\ldots k_2^{-1}k_1^{-1}h_1h_2\ldots h_r = e$ eine Relation aus W_1 . Dabei ist $l(w) = r + s \leq n + 1$.

Also ist dann $w \in W_1^{(n+1)} = W_2^{(n+1)}$.

Ferner ist ε bijektiv, wie analog folgt.

Seien $x,y \in V(Y_1)$, so daß $[x,y] \in E(Y_1)$ ist.

Dann ist $h:= x^{-1}y \in H$ und $w : x^{-1}yh^{-1} = e$ eine Relation aus W_1 . Es ist $l(w) = d(e,x) + d(e,y) + 1$.

Ist $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$, so ist $d(e,x),d(e,y) \leq \frac{n}{2}$.

Dann ist $l(w) \leq n + 1$.

Einleitung

Ein ungerichteter schlichter Graph X wird graphische Darstellung einer Gruppe G genannt, wenn die Automorphismengruppe A(X) von X isomorph zu G ist. R. FRUCHT [Fr 1] hat gezeigt, daß jede endliche Gruppe eine endliche graphische Darstellung besitzt. G. SABIDUSSI [Sa 4] hat gezeigt, daß jede unendliche Gruppe eine (unendliche) graphische Darstellung besitzt.
Ausgehend von diesen Resultaten ist von einer Anzahl von Autoren das Problem der graphischen Darstellbarkeit von Gruppen untersucht worden, wenn man an die graphischen Darstellungen zusätzliche Anforderungen stellt.
Solche Anforderungen sind z.B. Eigenschaften der Automorphismengruppe als Permutationsgruppe auf der Eckenmenge V(X) von X.
Bereits R. FRUCHT hat in [Fr 1] die Frage untersucht, ob es zu jeder endlichen Gruppe G eine graphische Darstellung X von G gibt, bei der A(X) transitiv auf V(X) ist. Am Beispiel der zyklischen Gruppe Z_3 hat er gezeigt, daß dies nicht immer der Fall ist.
W. IMRICH und M.E. WATKINS haben in einer Reihe von Arbeiten das Problem untersucht, welche Gruppen eine graphische Darstellung besitzen, bei der die Automorphismengruppe A(X) regulär auf der Eckenmenge V(X) ist. Eine solche graphische wird reguläre graphische Darstellung (GRR) genannt.
Das oben genannte Problem wird nach M.E. WATKINS als GRR-Problem bezeichnet.
Das Thema dieser Arbeit ist die Untersuchung des GRR-Problems für auflösbare Gruppen. Die Lösung des GRR- Problems für auflösbare Gruppen ist ein erster Schritt zur Lösung des allgemeinen GRR-Problems, die gegenwärtig noch nicht in Sicht ist.
Diese Arbeit stützt sich im Wesentlichen auf die Arbeiten von W. IMRICH und M.E. WATKINS über das GRR-Problem, die fast alle das GRR-Problem für auflösbare Gruppen behandeln. Im Folgenden geben wir einige der wichtigsten Ergebnisse über das GRR-Problem für auflösbare Gruppen an. C.Y. CHAO [Ch 1] und G. SABIDUSSI [Sa 3] haben unabhängig voneinander gezeigt, daß die abelschen Gruppen L, deren Exponent exp(L) > 2 ist, keine GRR's besitzen. L.A. NOWITZ [No 1] und M.E. WATKINS [Wa 1] haben unabhängig voneinander gezeigt, daß die verallgemeinerten dizyklischen Gruppen (GDC-Gruppen) keine GRR's besitzen.
M.E. WATKINS [Wa 3] hat die Vermutung geäußert, daß es eine natürliche Zahl n gibt, so daß alle nichtabelschen, nicht-GDC-Gruppen, deren Ordnung > n ist, eine GRR besitzen. L.A. NOWITZ und M.E. WATKINS [No-Wa 2] haben gezeigt, daß alle nichtabelschen Gruppen, deren Ordnung relativ prim zu 6 ist, eine GRR besitzen.

W. IMRICH [Im 6] hat gezeigt, daß alle nichtabelschen Gruppen ungerader Ordnung mit Ausnahme einer Gruppe der Ordnung 27 eine GRR besitzen.
Das Hauptresultat dieser Arbeit ist die Lösung des GRR-Problems für auflösbare Gruppen. Sie lautet:
Sei G eine auflösbare Gruppe. Genau dann besitzt G eine GRR, wenn
a) G eine nichtabelsche, nicht verallgemeinert dizyklische Gruppe und keine von zehn Ausnahmegruppen ist, deren Ordnung sämtlich $\leqslant 32$ ist,
oder
b) G eine der Gruppen Z_2^n ist, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $n \neq 2,3,4$ ist.
Es kommt uns in dieser Arbeit darauf an, für den größten Teil der benötigten Resultate auch den Beweis anzugeben. Dennoch werden wir an einigen Stellen Resultate zitieren, ohne den Beweis hier zu führen. Ferner wurde auf eine Trennung der rein gruppentheoretischen von den graphentheoretischen Ergebnissen Wert gelegt.
Eine zentrale Rolle bei der Untersuchung des GRR-Problems spielt der Begriff des Cayley-Graphen. G. SABIDUSSI [Sa 1] hat gezeigt, daß jede GRR einer Gruppe G isomorph zu einem Cayley-Graphen der Gruppe G ist. L.A. NOWITZ und M.E. WATKINS [No-Wa 1] haben ein hinreichendes Kriterium dafür angegeben, daß ein Cayley-Graph einer Gruppe eine GRR dieser Gruppe ist. Die Automorphismengruppen der Cayley-Graphen sind transitiv auf den Eckenmengen. Unter dem Cayley-Index eines Cayley-Graphen verstehen wir die Mächtigkeit des Stabilisators einer Ecke. Unter dem Cayley-Index c(G) einer Gruppe G verstehen wir das Minimum der Cayley-Indices der Cayley-Graphen der Gruppe G.
Ein Cayley-Graph der Gruppe G, dessen Cayley-Index gleich dem Cayley-Index c(G) der Gruppe G ist, wird als MRR (most rigid representation) der Gruppe G bezeichnet.
Neben der direkten Konstruktion von GRR's für einzelne Gruppen werden zur Lösung des GRR-Problems Methoden benötigt, mit denen ausgehend von einer MRR einer Gruppe MRR’s für andere Gruppen konstruiert werden können. Wir behandeln zwei solche Methoden: die Erweiterungsgruppen- und die Faktorgruppenmethode.
Ist G eine Gruppe und X eine MRR von G, so gehen wir bei der Erweiterungsgruppenmethode so vor, daß wir für eine gegebene Erweiterungsgruppe G_1 von G diejenigen Cayley-Graphen X_1 untersuchen, bei denen die auf den Nebenklassen von G in G_1 induzierten Untergraphen sämtlich isomorph zum Graphen X sind. Unter diesen Graphen befindet sich dann i.A. eine MRR der Gruppe G_1.
Bei der Faktorgruppenmethode wird für eine gegebene Faktorgruppe G_0 der Gruppe G

durch "Faktorisierung" der MRR X der Gruppe G ein Cayley-Graph X_0 bestimmt. In den Graphen X und X_0 sind dann gewisse "Umgebungen" der Ecke e isomorph. Häufig läßt sich daraus ablesen, daß X_0 eine MRR des Gruppe G_0 ist.

Der Beweis der Lösung des GRR-Problems für auflösbare Gruppen ist ein Beweis durch vollständige Induktion. Die Induktion wird dabei über die Länge der Kompositionsreihen der Gruppen geführt. Der Induktionsanfang besteht in einer Vielzahl von Einzelergebnissen über den Cayley-Index kleiner Gruppen. Der Induktionsschluß besteht in der Anwendung der Erweiterungsgruppenmethode, wobei je nach dem Typ der zu erweiternden Gruppe und der Art der Erweiterung eine größere Zahl von Fällen unterschieden wird.

In **Kapitel I** werden die grundlegenden Definitionen angegeben. Weiter wird dort der Cayley-Graph definiert und seine Eigenschäften untersucht.

In **Kapitel II** werden Cayley-Graphen von Erweiterungen vorgegebener Gruppen untersucht. Dadurch werden die zur Anwendung der Erweiterungsgruppenmethode nötigen Hilfsmittel bereitgestellt.

In **Kapitel III** wird der Cayley-Index der abelschen und der GDC-Gruppen bestimmt. Dies ist erforderlich zu der in **Kapitel IV** erfolgenden Bestimmung des Cayley-Indexes der nichtabelschen, nicht verallgemeinert dizyklischen Erweiterungen von abelschen und GDC-Gruppen.

In **Kapitel V** wird der Cayley-Index der nichtabelschen, nicht-GDC-Gruppen, deren Ordnung $\leqslant 32$ ist, sowie der einiger nichtabelscher, nicht-GDC-Gruppen größerer Orcnung bestimmt. Damit wird der Induktionsanfang sichergestellt.

In **Kapitel VI** wird der Cayley-Index der Erweiterungen der oben erwähnten zehn Ausnahmegruppen bestimmt. Dies ist gesondert erforderlich, da die allgemeine Erweiterungsgruppenmethode hier keine Resultate liefert.

In **Kapitel VII** beweisen wir den Hauptsatz über das GRR-Problem für auflösbare Gruppen durch vollständige Induktion.

Die Arbeit enthält zwei Anhänge. In Anhang 1 findet sich eine tabellarische Übersicht über die Gruppen, deren Ordnung $\leqslant 32$ ist, sowie die zugehörigen Cayley-Indices und minimalen MMR’s. Anhang 2 enthält einige Computerprogramme, die zur Bestimmung der Cayley-Indices einiger „kleiner" Gruppen benutzt wurden, sowie die zugehörigen Programmbeschreibungen.

Literaturhinweise sind in eckige Klammern gesetzt. Weichen Voraussetzungen oder Aussagen der Sätze bzw. Lemmas, auf die verwiesen wird, stark ab, so werden die

Literaturhinweise zusätzlich in runde Klammern eingeschlossen, ohne auf die Abweichungen näher einzugehen.

Herr Prof. Dr. W. Imrich und Herr Prof. Dr. M. E. Watkins stellten mir die Manuskripte ihrer noch nicht erschienenen Arbeiten zum GRR-Problem zur Verfügung. Für diese Unterstützung, ohne die diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre, möchte ich mich hier bedanken. Darüber hinaus danke ich Herrn Prof. Dr. W. Imrich für Hinweise und Anregungen.

1 ALLGEMEINES

1.1. Definitionen

Alle vorkommenden Graphen seien, wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt, schlichte ungerichtete endliche Graphen. Alle vorkommenden Gruppen seien, wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt, endliche Gruppen.

Ist X ein Graph, so sei:

V(X) seine Eckenmenge

E(X) seine Kantenmenge

A(X) seine Automorphismengruppe

Sind $x,y \in V(X)$,und ist $U \subset V(X)$, so sei

d(x,y) der Abstand der Ecken x und y,

$S_n(x) = \{ z \in V(X) \mid d(x,z) = n\}$ ($n \in \mathbf{N}$) die n-Sphäre der Ecke x im Graph X.

$N(x) = S_1(x)$ die Menge der Nachbarn der Ecke x,

$N(x,U) = N(x) \cap U$,

$\varrho(x) = |N(x)|$ der Eckengrad der Ecke x,

$\varrho(x,U) = |N(x,U)|$,

$A_x(X) = \{\varphi \in A(X) \mid \varphi(x) = x\}$ der Stabilisator der Ecke x,

$X|_U$ der auf der Eckenmenge U induzierte Untergraph von X.

Es sei: X' der **Komplementärgraph des Graphen X**

$N'(x) = V(X) - (N(x) \cup \{x\})$ die Menge der Nachbarn der Ecke x im Graphen X'

$\varrho'(x) = |N'(x)|$,

$N'(x,U) = N'(x) \cap U$,

$\varrho'(x,U) = N'(x,U)$

Der Graph X wird, i**sovalent** und speziell ϱ-valent-genannt, wenn es eine Kardinalzahl ϱ gibt, so daß für alle $x \in V(X)$ gilt: $\varrho(x) = \varrho$ [Im-Wa 1, S. 462].

Ist G eine Gruppe, so sei:

e ihr neutrales Element,

Z(G) ihr **Zentrum**,

Aut(G) ihre **Automorphismengruppe**,

Sind $x,y \in G$ und ist $U \subset G$, so sei

$[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$ der **Kommutator** von x und y,

$xU = \{xz \mid z \in U\}$.

$U^{-1} = (z \mid z^{-1} \in U\}$,

$<U>$ die von U erzeugte Untergruppe von G

Zentr(x) = $\{g \in G \mid xg = gx\}$ der **Zentralisator** des Elements x von G.

Endliche Gruppen geben wir häufig in der Form $< a_1,\ldots,a_r \mid R_1, \ldots, R_s >$ an.

Dabei sind die Elemente $a_1,\ldots,a_n$ ein **Erzeugendensystem** der Gruppe und die Relationen $R_1,\ldots R_n$ die erzeugenden Relationen.

Unter den erzeugenden Relationen treten Aussagen über die Ordnung der Elemente a_i auf in der Form: $a_i^k = e$ (d.h. $o(a_i) = k$) oder in der Form: $a_i^k = a_j$. Ferner treten Aussagen über die Kommutatoren auf in der Form $a_i^{-1}\, a_k\, a_i = \ldots$.

Ist für zwei Elemente a_i und a_k keine derartige **Kommutatorrelation** angegeben, so bedeutet das, daß a_i und a_k kommutieren.

Die Elemente $a_1,\ldots,a_r$ werden im Allgemeinen so gewählt sein, daß die Gruppe $<a_1,\ldots, a_{i-+1}>$ jeweils zyklische Erweiterung der Gruppe $<a_1,., a_i>$ ist.

Die zyklischen Gruppen mit n Elementen seien mit Z_n bezeichnet.

1.2. Definition:

Sei $r \in \mathbb{N}$. Für. $0 < i< r$ seien $m_i \in \mathbb{N}$, so daß $m_{i+1}|m_i$ ist.

Sei definiert:

$$(m_1,\ldots, m_r) = Z_{m1} \times Z_{m2} \times \ldots \times Z_{mr}$$

Ist $L = (m_1,m_2,\ldots,m_r)$, so sei die Repräsentation

$$<a_1,a_2,\ldots,a_r \mid a_i^{mi} = e \ (1\leq i\leq r) >$$

von L durch erzeugende Elemente als Standardrepräsentation von L bezeichnet.

Bemerkung: Wegen des Hauptsatzes über endlich erzeugte abelsche Gruppen ist die Zuordnung der Menge der endlichen abelschen Gruppen zur Menge der Symbole $(m_1, m_2,\ldots,m_r)$ eineindeutig.

1.3. Definition: [No-Wa 1, S. 994]

Eine nichtabelsche Gruppe G wird verallgemeinert **dizyklische Gruppe** (**GDC-Gruppe**) der abelschen Gruppe L genannt, wenn

i) L Untergruppe vom Index 2 in G ist, und

ii) es ein $b \in G - L$ gibt, so daß $o(b) = 4$ und $b^{-1}xb = x^{-1}$ für alle $x \in L$ ist.

Ist L eine zyklische Gruppe, so heiβt G dizyklische Gruppe (DC-Gruppe).

Ist $L = Z_4$, so ist $G = <a,b \mid a^4 =e,b^2 =a^2,b^{-1}ab= a^{-1} >$.

Dann heiβt G Ouaternionengruppe und wird mit Q bezeichnet.

Die GDC-Gruppen $Q \times Z_2^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, seien hier als verallgemeinerte

Quaternionengruppen (GQ-Gruppen) bezeichnet.

1.4. Definition:

Sei $r \in \mathbb{N}$ und $1 \leqslant k \leqslant r$. Für $1 \leqslant i \leqslant r$ sei $m_i \in \mathbb{N}$, so daß $m_1 > 3$, $2|m_k$, und

$m_{i+1}|m_i$ für $1 \leqslant i \leqslant r-1$ ist,

Sei definiert:

$GDC(m_1,...,m_k,...,m_r) = < a_i,b \mid a_i^{mi} = e, b^2 = a_k^{mk}, b^{-1}a_ib = a_i^{-1}{}_1 \ (1\leqslant i\leqslant r-1)>$

Sei $n_1 \geqslant 2$. Sei dann definiert:

$DC(2n) = <a,b \mid a^{2n} = e, b^2 = a^n, b"^1ab = a^{-1} >$.

1.5. Bemerkung:

Die Gruppe $GDG(m_1,.,m_k,.,m_r)$ ist eine GDC-Gruppe der abelschen Gruppe

$L = (m_1,....,m_r)$.

In Lemma 6.12. wird gezeigt, daß sich jede endliche GDC-Gruppe durch ein Symbol

$GDGC(m_1,...,\underline{m_k},...,m_r)$ beschreiben läßt.

Die Zuordnung ist jedoch nicht eineindeutig.

Sind alle GDC-Gruppen der abelschen Gruppe $L = (m_1,.., m_r)$ isomorph, so wird die Unterstreichung auch weggelassen.

So ist z.B. $GDC(6,2) = GDC(6,\underline{2}) = GDC(\underline{6},2)$.

Die Gruppe $DC(2n)$ ist eine DG-Gruppe.

Es ist $DC(4) = Q$ und $GDC(\underline{4},2,...,2) = Q \times Z_2{}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ eine GQ-Gruppe.

1.6. Definition:

Eine nichtabelsche Gruppe G wird verallgemeinerte Diedergruppe (GDH-Gruppe) der abelschen Gruppe L genannt, wenn

i) L Untergruppe vom Index 2 in G ist, und

ii) es ein $d \in G - L$ gibt, so daß $d^2 = e$ und $d^{-1}xd = x^{-1}$ für alle $x \in L$ ist.

Dann ist: $G = <L,d \mid d^2 = e, dxd = x^{--1}$ für alle $x \in L$.

Ist L eine zyklische Gruppe, so heißt G Diedergruppe (DH-Gruppe).

Sei $r \in \mathbb{N}$. Für $1 \leqslant i \leqslant r$ seien $m_i \in \mathbb{N}$, so daß $m_{i+1} \mid m_i$ und $m_1 \geqslant 3$ ist.

Sei definiert: $GDH(m_1,....,m_r) = < a_i,d \mid a_i^{mi} = e, d^2 = e, da_id = a_i^{-1} \ (1 \leqslant i\leqslant r)>$.

Sei $n \geqslant 3$. Sei definiert:

$DH(n) = <a,d \mid a^n = d^2 = e, dad = a^{-1}>$.

1.7. Bemerkung:

Die Gruppe $GDH(m_1,....,m_r)$ ist eine GDH-Gruppe der abelschen Gruppe L.

Die Gruppe DH(n) ist eine DH-Gruppe.

Wegen Bemerkung 1.2. ist die Zuordnung der Menge der der endlichen GDH-Gruppen zur Menge der Symbole GDH($m_1,\ldots, m_r$) eineindeutig.

1.8. Definition:

Eine nichtabelsche Gruppe, die semidirektes Produkt zweier zyklischer Gruppen, aber keine GDC-Gruppe ist, wird **SPC-Gruppe** genannt.

Seien $r,s,t \in \mathbb{N} - \{1\}$, so daß $t < r$, $(r,t) = 1$ und $t^s = 1 \pmod r$ ist.

Sei definiert: $SPC(r,s;t) = \langle a,b \mid a^r = b^s = e,\ b^{-1}ab = a^t \rangle$.

1.9. Bemerkung:

Da $(r,t) = 1$ und $t^s = 1 \pmod r$ ist, ist die Gruppe SPC(r,s;t) wohldefiniert (siehe [Ko 1, S. 108]).

Ist die Gruppe SPC(r,s;t) eine GDC-Gruppe, so ist $s = 4$ und $t = r-1$.

Es ist SPC(r,4;r-1) = GDC(r,2). Es ist SPC(r,2;r-1) = DH(r).

Ist $s \neq 4$ oder $t \neq r - 1$, so ist die Gruppe SPC(r,s;t) eine SPC-Gruppe.

1.10. Definition:

Eine nichtabelsche Gruppe G heiße GDCH-Gruppe, wenn es eine normale abelsche Untergruppe L vom Index 4 in G und Elemente $b,d \in G - L$ gibt, so daß gilt:

$G = \langle L,b,d \rangle$, $b^2 \in L$, $o(b) = 4$, $d^2 = e$, $dbd = b^{-1}$ für alle $x \in L$, $dxd = x$ für alle $x \in L$.

Sei G = GDC($m_1,\ldots, \underline{m_r},\ldots, m_k$) eine GDC-Gruppe.

Sei definiert GDCH($m_1,\ldots, \underline{m_r},\ldots, m_k$)=

$$\langle a_i,b,d \mid a_i^{m_i}=d^2=e,\ b^2= a_k^{m_k},\ b^{-1}a_ib=a_i^{-1},\ dbd =b^{-1}\ (1 \leq b \leq r) \rangle$$

1.11. Bemerkung:

Sei G eine GDCH-Gruppe der abelschen Gruppe L.

Dann ist $\langle L,b \rangle$ eine GDC-Gruppe von L, $\langle L,bd \rangle$ eine GDH-Gruppe von L und $\langle L,d_1 \rangle = L \times Z_2$ eine abelsche Gruppe.

Die Gruppe GDCH($m_1,\ldots,m_k,\ldots,m_r$) ist eine GDCH-Gruppe. Jeder GDCH-Gruppe läßt sich ein Symbol GDCH($m_1,\ldots,\underline{m_k},\ldots,m_r$) zuordnen.

In dieser Arbeit erweist es sich als notwendig, die Gruppen, deren Ordnung ≤ 32 ist, zu untersuchen.

Eine Liste der nichtabelschen Gruppen, deren Ordnung ≤ 32 ist, findet sich in [Co-Mo 1, Table 1, S. 134].

Eine Liste der Gruppen der Ordnung 2^n, $1 \leq n \leq 6$ findet sich in [Ha-Se 1].

Auszüge aus den genannten Werken finden sich in Anhang. Für Gruppen, deren Ordnung ≤ 32 ist, führen wir eine Bezeichnung der Form (m.n) ein. Dabei ist die Gruppe G = (m.n) die n-te Gruppe der Ordnung m.
Bei den Gruppen der Ordnung 2”, 1≤ n ≤5, halten wir uns dabei an die in [Ha-Se 1] eingeführte Nummerierung.
Bei den übrigen Gruppen der Ordnung ≤ 32 richten wir unsere Nummerierung nach der Reihenfolge, in der die Gruppen in [Co-Mo 1] aufgeführt sind. Dabei werden die dort fehlenden abelschen Gruppen in der Nummerierung vorangestellt.
Die explizite Zuordnung der Gruppen zu den Bezeichnungen (m,n) findet sich in Anhang 1, Tabellen 1–3.
Für einige Gruppen, deren Ordnung > 32 ist, führen wir eine Bezeichnung der Form (m,x) ein, wobei m die Ordnung der Gruppe angibt, und x ein kennzeichnender Buchstabe ist.

1.12. Definition

Sei M eine Menge und. n $\in \mathbb{N}$.

1) Die Menge aller Permutationen der Menge M sei mit S(M) bezeichnet. Die symmetrische Gruppe auf einer Menge mit n Elementen sei mit S_n bezeichnet. Die alternierende Gruppe auf einer Menge mit n Elementen sei mit A_n bezeichnet. Die identische Permutation auf M sei mit $\mathbf{1}_M$ bezeichnet.

2) Sei A eine Permutationsgruppe auf der Menge M und x$\in$ M. A heiβt regulär auf M, wenn es zu je zwei x,y $\in$ M genau ein φ A gibt, so daß φ(x) = y ist.

3) Die Gruppe A_x = < φ $\in$ A | φ(x) = x> heiβt Stabilisator des Elements x.

4) Eine Menge B $\subseteq$ M heiβt Block von A, wenn für alle φ$\in$A gilt:

$$\varphi[B] = B \text{ oder } \varphi[B] \cap B = \emptyset.$$

5) Eine Partition $B_1,\dots,B_r$ von M heiβt vollständiges Blocksystem von A, wenn für alle φ $\in$ A und alle i $\in$ {1,...,r} gilt: φ $[B_i] \in \{B_1,\dots,B_r\}$.

6) Wir sagen, daß die Menge N $\subset$ M unter A stabil bleibt, wenn für alle φ $\in$ A gilt φ[N] = N [Im 5, S. 907].

7) Wir sagen, daß die Menge N $\in$ M unter A fest bleibt, wenn für alle y$\in$ N und alle φ$\in$A gilt: φ (y) = y [Im 5, S. 90].

8) Ist φ $\in$ A, so sei W(φ) = {x $\in$ M | φ(x) ≠ x} und F(φ) = {x $\in$ M | φ(x) = x}.
Sei w(φ) = | W(φ) | und f(φ) = |F(φ)|.

9) Ist G eine Gruppe, so sei inv $\in$ S(G) definiert durch inv(x) = x^{-1} für alle x $\in$ G.

1.13. Definition:

Sei G eine Gruppe und X ein Graph.

X heiβt **reguläre graphische Darstellung (GRD)** von G, wenn

i) A(X) regulär auf V(X) und

ii) A(X) isomorph zu G ist.

2. Cayley-Graphen

2.1. Definition:

Sei G eine Gruppe.

Eine Menge $H \subset G$ heiβt Cayleymenge (CM) von G, wenn $e \notin H$ und $H = H^{-1}$ ist.

Ist H eine Cayleymenge von G, so wird die Cayleymenge $H' = G - (H \cup \{e\})$ als die zu H komplementäre CM bezeichnet.

Zwei Cayleymengen H_1 und H_2 von G werden isomorph genannt, wenn es ein $\varphi \in Aut(G)$ gibt, so daß $\varphi[H_1] = H_2$ ist.

Zwei Cayleynengen H_1 und H_2 von G werden komplementär genannt, wenn es ein $\varphi \in Aut(G)$ gibt, so daß $\varphi[H,] = H_2'$ ist.

Zwei CM von G werden äquivalent (genauer: c-äquivalent) genannt, wenn sie isomorph oder komplementär sind.

Eine CM H von G heiβt Cayleyerzeugendensystem (CES) von G, wenn $<H> =<H'> = G$ ist.

2.2. Definition: [Sa 1, Def. 2], [Sa 3, Def. 4]

Sei G eine Gruppe und H eine Cayleymenge von G

Der Graph $X = X(G,H)$ mit $V(X) = G$ und $E(X) = \{ [x,xh] \mid x \in G, h \in H\}$ wird als der von H erzeugte Cayleygraph (CG) von G bezeichnet.

2.3. LEMMA:

Sei $X = X(G,H)$.

1. Seien $x,y \in V(X)$. Dann gilt: $[x,y] \in E(y) \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$
2. X ist ein $|H|$ -valenter Graph und für alle $x \in V(X)$ ist $N(x) = xH$.
3. Es ist $X' = X(G,H')$
4. X ist genau dann zusammenhängend, wenn $<H>= G$ ist.
5. Genau dann ist sowohl X als auch X' zusammenhängend, wenn H ein Cayley-Erzeugendensystem von G ist.

Beweis:

1. Sei $[x,y] \in E(X)$. Dann ist $y \in xH$ oder $x \in yH$.
Da $H=H^{-1}$ ist, ist in beiden Fällen $x^{-1} y \in H$. Sei $x^{-1} y \in H$. Dann ist $[x,y] \in E(X)$.
2. Die Aussage 2) folgt unmittelbar aus 1).
3. Sei $x \in V(X)$. Dann ist $N'(x) = V(X) - (N(x) \cup \{x\}) = G - (xH \cup \{e\}) = G – x(H \cup \{e\}) = x(G - (H \cup \{e\}))$. Also ist $X' = X(G,H')$.

4. Sei <H> = G und $x \in G$. Dann gibt es Elemente h_i aus H, so daß $x = h_1 * h_2 * \ldots * h_n$ ist. Für $0 \leqslant i \leqslant n$ sei definiert: $x_i = h_1 * h_2 * \ldots * h_i$. Dann ist $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ein Weg zwischen e und x. Also ist dann X zusammenhängend. Die andere Richtung des Beweises erfolgt analog.

5. Die Aussage 5) ergibt sich unmittelbar aus 3) und 4).

2.4. LEMMA:

Sei X = X(G,H) und Y = X(G,K).

1. Sind die Mengen H und K äquivalent (isomorph), so sind auch die Graphen X und Y äquivalent (komplementär) isomorph,
2. Sind die Graphen X und Y isomorph (komplementär), so gibt es ein $\Phi \in S(G)$, so daß gilt:

i) $\Phi(e) = e$

ii) $\Phi[xH] = \Phi(x)K$ bzw. $\Phi[xH] = \Phi(x)K'$ für alle $x \in G$

Beweis:

1. Sei $\varphi \in Aut(G)$, so daß $\varphi[H] = K$ bzw. $\varphi[H] = K'$ ist. Seien $x, y \in G$.

Dann ist: $[x,y] \in E(X) \Leftrightarrow x^{-1}y \in H \Leftrightarrow \varphi(x^{-1}y) \in K$ (bzw. K')

$\Leftrightarrow [\varphi(x), \varphi(y)] \in E(Y)$ (bzw. E(Y')). Also sind dann X und Y isomorph bzw. komplementär.

2. Die Graphen X und Y seien isomorph, und Φ: X -> Y ein Isomorphismus. Dann kann man o.B.d.A. annehmen, daß $\Phi(e) = e$ ist.

Für jedes $x \in G$ ist dann: $\Phi[xH] = \Phi[N_X(x)] = N_Y(\Phi(x))$. Damit ist alles gezeigt.

2.5. Definition:

Sei G eine Gruppe und $g \in G$. Die Linkstranslation von G mit g sei mit λ_g oder $\underline{g}$ bezeichnet, d.h. $\lambda_g : G \to G, x \to gx$. Sei $\Lambda_G = \underline{G} = \{ \lambda_g \mid x \in G \}$.

2.6. Definition:

Sei G eine Gruppe und H eine CM von G. Sei definiert:

1. $Aut(G,H) = \{\varphi \in Aut(G) \mid \varphi[H] = H \}$
2. $A(G,H) = \{ \Phi \in S(G) \mid \Phi(e) = e, \Phi[xH] = \Phi(x)H$ für alle $x \in G\}$

2.7. LEMMA:

Sei X = X(G,H).

1. $\underline{G}$ ist eine zu G isomorphe auf V(X) reguläre Untergruppe von A(X).
2. Es ist $A(G,H) = A_e(X)$.

3. Aut(G,H) ist Untergruppe von $A_e(X)$. [Wa 1, Lemma 5]

4. $A(X) = \underline{G} \bullet A_e(X)$

Beweis:

1. Daß $\underline{G}$ zu G isomorph und auf V(X) = G regulär ist, folgt unmittelbar aus der Definition von $\underline{G}$. Sei $g \in G$ und $[x,xh] \in E(X)$. Dann ist $\Phi([x,xh]) = [gx,gxh]$.
Also ist $\underline{g} \in A(X)$ und $\underline{G} < A(X)$.

2. A(G,H) ist eine Gruppe. Sei $\Phi \in A_e(X)$.
Dann ist $\Phi(e)=e$ und $\Phi[xH] = \Phi[N(x)] = N(\Phi(x)) = \Phi(x)\, H$ für alle $x < G$.
Also ist $A_e(X) \leq A(G,H)$.
Sei $\Psi \in A(G,H)$ und $x \in G$. Dann ist $\Psi(N(x) = \Psi[xH] = \Psi(x)H = N(\Psi_{(x)})$ und $\Psi(e) = e$.
Also ist $\Psi \in A_e(X)$ und deshalb $A(G,H) \leq A\ (X)$. Daraus folgt die Gleichheit der Gruppen $A_e(X)$ und A(G,H).

3. Aut(G,H) ist eine Gruppe. Sei $\varphi \in Aut(G,H)$.
Dann ist $\varphi(e) = e$ und für alle $x \in V(X)$ ist $\varphi(N(x)] = \varphi\ txH] = \varphi(x)H = N(\varphi(x))$.
Also ist $\varphi \in A_e(X)$ und $Aut(G,H) \leq Ae(x)$.

2.8. SATZ:

Sei Y ein Graph und X = X(G,H) ein Cayleygraph.
Genau dann sind die Graphen X und Y isomorph, wenn es
i) einen Isomorphismus β von G auf eine auf V(Y) reguläre Untergruppe U von A(Y) und
ii) ein $a \in V(Y)$ gibt, so daß gilt: $\beta\,[H]= \{\ \Phi \in U \mid \Phi(a) \in N(a)\ \}$.

Beweis:

I) Sei X = Y. Sei dann $U = \underline{G}$, β: G —> U, x —> x und a = e. Dann ist U eine auf V(Y) reguläre Untergruppe von A(Y) und β ein Isomorphismus von G auf U.
Es ist $\beta[H] = \{\underline{h} \in U \mid h \in H\} = (\Phi \in U \text{ I } \Phi(e) \in N(e)]$.

II) Sei U eine auf V(Y) reguläre Untergruppe von A(Y), β : G —>U ein Isomorphismus und $a \in V(Y)$, so daß ii) gilt.
Die Abbildung ε: V(X) —> V(Y) sei definiert durch $\varepsilon(x) = \beta(x)(a)$ $(x \in G)$. Dann ist ε bijektiv. Seien $x, y \in V(X)$. Dann ist: $\varepsilon([x,y]) = [\beta(x)(a), \beta(y)(a)]$ und
$\varepsilon([x,y]) \in E(Y) \Leftrightarrow [a, \beta(x^{-1}y)(a)] \in E(Y) \Leftrightarrow \beta(x^{-1}y) \in \{\ \Phi \in U \mid \Phi(a)=N(a)\} = \beta[H] \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$.
Also ist ε ein Graphenisomorphismus und X und Y sind isomorph.

2.9. Folgerung:

1) Der Graph X ist genau dann isomorph zu einem Cayleygraphen der Gruppe G, wenn

es eine zu G isomorphe auf V(X) reguläre Untergruppe von A(X) gibt. [Sa 1, Lemma 4]
2) Jeder Graph X mit regulärer Automorphismengruppe ist isomorph zu einem CG der Gruppe G = A(X). [Sa 1, Theorem 2]

Beweis:

1) Ist X = X(G,H), so ist <u>G</u> eine zu G isomorphe auf V(X) reguläre Untergruppe von A(X). Ist U eine zu G isomorphe, auf V(X) reguläre Untergruppe von A(X), so sei $\beta : G \longrightarrow U$ ein Isomorphismus und $a \in V(X)$. Sei dann $H = \beta^{-1} [\{\Phi \in U \mid \Phi(a) \in N(a)\}]$. Dann ist der Graph Y = X(G,H) nach Satz 2.8. isomorph zum Graphen X.

2) Die Aussage 2) folgt unmittelbar aus 1).

2.10. Definition:

Sei X = X(G,H). Sei definiert:

1) $c(G,H) = |A_e(X)|$ heiβt Cayley-Index des Graphen X. [Im-Wa 2]
2) c(G) = min c(G,H), wobei das Minimum über alle Cayley-Mengen H von G genommen wird. c(G) heiβt Cayley-Index der Gruppe G. [Im-Wa 2]
3) Der Graph X(G,H) heiβt **MRR (=most rigid Representation)** von G, wenn c(G,H) = c(G) ist. [Im-Wa 2]
4) Der Graph X(G,H) heiβt **ARR (=almost regular representation)** von G, wenn c(G,H) = 2 ist. [Im 4]
5) a(G,H) = |Aut(G,H)|
6) a(G) = min a(G,H),, wobei das Minimum über alle Cayley-Mengen H von G genommen wird.

2.11. Bemerkung:

1) Der Graph X = X(G,H) ist genau dann GRR der Gruppe G wenn c(G,H) = 1 ist.
2) Die Gruppe G besitzt genau dann eine GRR, wenn c(G) =1 ist.
3) Es ist a(G,H) | c(G,H) für alle CM H von G
4) Es ist $a(G) \leq c(G)$.

2.12. LEMMA:

Sei X = X(G,H).und. $U = < H \cup \{e\}>$. Sei n = G:U.

Dann ist $c(G,H) = c(U,H)^n\ (n - 1)!\ |U|^{n-1}$

Ist $n \geq 2$, so ist $c(G,H) \geq 1/2\ o(G)$

Beweis:

Es ist $c(G,H) = c(U,H) * |S_{n-1}| * (|A(X(U,H))| *)^{n-1}$

$= c(U,H)*(n-1)!*|U|^{n-1}*c(U,H)^{n-1}$

$= c(U,H)^n *(n-1)! *|U|^{n-1}$.

Sei $n \geq 2$. Dann ist: $c(G,H) \geq (n-1)!\,|U| =(n-1)!/n * |G| > \frac{1}{2}\,|G|$.

2.13. Folgerung: [Im 4, Prop. 2-1]

Sei $X = X(G,H)$.

1) Ist $c(G,H) = 1$ und $o(G) \geq 3$, so ist H ein CES von G.

2) Ist $c(G,H) = 2$ und $o(G) \geq 5$, so ist H ein CES von G.

Beweis:

Sei $U = \langle H \cup \{e\} \rangle$ und $n = G : U$.

Ist H kein CES von G, so kann man wegen $c(G,H)=c(G,H')$ o.B.d.A. annehmen, daß $n\geq 2$ ist. Nach Lemma 2.12. ist dann $o(G) \leq 2c(G,H)$.

1) Sei $c(G,H) = 1$ und H kein CES von G. Dann ist $o(G) \leq 2$. Ist also $o(G) \geq 3$, so ist H ein CES von G.

2) Sei $c(G,H) = 2$ und H kein CES von G. Dann ist $o(G) = 2*2= 4$. Ist also $o(G) \geq 5$, so ist H ein CES von G.

2.14. Definition:

Sei $X = X(G,H)$ ein CG und $U_n = \{x \in G \mid d(e,x) < n\}$

Sei definiert $X^{(n)} = X|_{U_n}$ und $X^{(n-0,5)} = X^{(n)} - E(X|_{S_n})$.

2.15. Definition:

Sei $X = X(G,H)$ eine GRR der Gruppe G und $n \in \mathbb{N}$. Bleibt die Menge H unter der Gruppe $Ae(X^{'0,5*n})$ fest, so sagen wir, daß X eine **n/2-sphärisch-reguläre graphische Darstellung** (n/2-GRR) von G ist.

Sei definiert $\prod(X) = \prod(G,H) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid A_e(X^{(n/2)}|_H = \{1_H\} \}$.

Bemerkung:

Sei $X = X(G,H)$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $U_n = (H \cup \{e\})^n$ und $S_n = H^n - U_{n-1}$

2.16. Definition:

Sei e ein Symbol und H eine Menge, so daß $e \notin H$ ist

1) Der Ausdruck $h_1 h_2 ... h_r = e$ mit $h_i \in H$ $(1 \leq i \leq r)$ heiβt Relation w der Länge $l(w)=r$ in H.

2) Ist W eine Menge von Relationen in H und $n \in \mathbb{N}$, so sei $W^{(n)} = \{w \in W \mid l(w) \leq n\}$.

3) Ist $\alpha \in S(H)$ und w: $h_1 .... h_1 r = e$ eine Relation, so sei $\alpha(w)$ die Relation $\alpha(h_1) .. \alpha(h_r)=e$.

4) Ist W eine Menge von Relationen in H, so sei $\alpha(W) = \{ \alpha(w) \mid w \in W\}$.

5) Ist W eine Menge von Relationen in H, so sei G die durch H und W eindeutig

definierte Gruppe.

6) Sind W_1 und W_2 zwei Mengen von Relationen in H, so sagen wir, daß W_1 und W_2 äquivalent sind, wenn es einen Isomorphismus φ: $<H|W_1>$ -> $<H|W_2>$ gibt, so daß φ[H] = H ist.
7) Sei W eine Menge von Relationen in H und α ∈ S(H). Sind W und α(W) äquivalent, so sagen wir, daß W unter α invariant ist, bzw. daß α für W zulässig ist.
8) Sei G eine Gruppe und H eine CM von G. Die Menge aller in G geltenden Relationen in H sei mit W(G,H) bezeichnet.
9) Ist G = <H|W> eine Gruppe und n ∈ ℕ, so sei $G^{(n)} = <H \mid W(G,H)^{(n)}>$.

2.17. SATZ:

Seien G_1 und G_2 zwei Gruppen. Sei $H \in G_1 \cap G_1$, so daß H eine Cayleymenge sowohl von G_1 als auch von G_2 ist.

Für i = 1, 2 sei definiert: $W_i = W(G_i,H)$ und $X_i = X(G_i,H)$. Sei n ∈ |N.

Ist dann $W_1^{(n+1)} = W_2^{(n+1)}$, so sind die Graphen X_1 und X_2 isomorph.

Beweis:

Sei $W_1^{(n+1)} = W_2^{(n+1)}$. Für i = 1,2 sei $Y_i = X_i^{(n/2)}$.

Für alle x ∈ $V(Y_1)$ ist d(x,e) ⩽ 1/2*(n+1) (i =1,2).

Also gibt es Elemente $h_1,h_2, \dots h_r, \in H$, so daß $x = h_1h_2\dots h_r$ und r = d(x,e) ist.

Sei ε : $V(Y_1) \rightarrow VC$-$_1$) definiert durch ε(e) = e und $\varepsilon(h_1h_2...h_r) = h_1h_2...h_r$ für alle $h_i \in H$ (1⩽ i ⩽ r) und alle r mit 1 ⩽ r ⩽ 1/2 (n+l). Dann ist ε eine wohldef. Abbildung.

Ist nämlich $x = h_1h_2...h_r = k_1k_2...k_r$ mit $h_i,k_j \in H$ und r,s ⩽1/2(n+1), so ist

w: $k_s^{-1}.. k_2^{-1}k_1^{-1}h_1h_2...h_r$ eine Relation aus W_1. Dabei ist l(w) = r + s ⩽ n + 1.

Also ist dann w-∈ $W_1^{(n+1)} = W_2^{(n+1)}$. Ferner ist ε bijektiv, wie analog folgt.

Seien x,y ∈ $V(Y_1)$, so daß [x,y] ∈ $E(Y_1)$ ist. Dann ist h:= $x^{-1}y \in H$ und w : $x^{-1}yh^{-1} = e$ eine Relation aus W_1. Es ist l(w) = d(e,x) + d(e,y) + 1. Ist n = 0 (mod 2),

so ist d(e,x), d(e,y) ⩽ n/2, Dann ist l(w) ⩽ n + 1.

Ist n = 1(mod 2), so ist d(e,x), d(e,y) ⩽ 1/2 (n+1) und d(e,x) oder d(e,y) ⩽1/2 (n-1), wie aus der Definition von Y_1 folgt. Also ist auch dann l(w) ⩽ n + 1.

Daraus folgt, daß w ∈ $W_1^{(n+1)} = W_2^{(n+1)}$ ist. Daraus ergibt sich, daß ε[x,y] ∈ $E(Y_2)$ ist.

Die Umkehrung dieser Aussage ergibt sich analog.

Also ist ε ein Graphenisomorphismus. Damit ist alles gezeigt.

2.18. LEMMA:

Sei $G = \langle H|U \rangle$ und $\alpha \in S(H)$.

1) Genau dann läßt sich α zu einem Automorphismus von G fortsetzen, wenn W(G,H) und α (W[G,H]) äquivalent sind.

2) Genau dann ist a(G,H) = 1, wenn für alle $\alpha \in S(H)$ gilt, daß W(G,H) und α (W[G,H]) nicht äquivalent sind.

Beweis:

1) A) Es gebe ein $\varphi \in Aut(G,H)$, so daß $\varphi|_H = \alpha$ ist. Dann sind W(G,H) und α (W[G,H]) nach Definition äquivalent. B) Seien W(G,H) and α[w(G,H)] äquivalent. Dann gibt es ein φ Aut(G;H), so daß $\varphi|_H = \alpha$ ist.

2) Die Aussage 2) folgt unmittelbar aus Aussage 1)

2.19. Definition: [IM 5]

Sei X = X(G,H) und $N \leq G$.

Der Graph Y mit $V(Y) = \{gN|\ g \in G\}$ und $E(Y) = \{[xN,yN]\ |\ x^{-1}y \in HN - N\}$ wird Quotientengraph von X bezüglich N genannt und mit X/N oder X(G,N,HN - N) bezeichnet.

2.20. LEMMA: [Wa 5, Lemma 2A], [Sa 3, Remark 2, p. 431]

Sei X = X(G,H) und $N \trianglelefteq G$. Dann ist $X/N = X(G/N, \underline{H})$, wobei $\underline{H} =\{ hN\ |\ h \in H\text{-}N\}$ ist.

Beweis:

Man überlegt sich leicht, daß S eine CM von $G_0 = G/N$ ist. Also ist der Graph $X_0 = X(G_0,\underline{H})$ wohldefiniert.

Sei X = X/N. Nach Definition ist $V(Y) = V(X_0)$. Seien $x, y \in G$. Dann ist

$[xN,yN] \in E(y) \Leftrightarrow x^{-1}y \in HN - N \Leftrightarrow x^{-1}yN \in (HN - N)\ N \Leftrightarrow (xN)^{-1}(yN) \in H \Leftrightarrow [xN,yN] \in E(X_0)$.

Also sind die Graphen identisch. Wir geben nun eine für unsere Zwecke geeignete Formulierung des Theorems von W. von Dyck (siehe [Ko 1, 2-5-3]).

2.21. LEMMA:

Sei G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$, $e \in H \subset G$. Sei W = W(G,H) und $W_1 = \{x{=}e|\ x \in N]$.

Sei $G_0 = \langle H\ |\ W \cup W_1 \rangle$ und $\underline{H} =\{ hN\ |\ h \in H - N\}$. Sei $\alpha: H \to \underline{H}$, $h \to hN$.

Dann gibt es einen Isomorphismus $\beta : G_0 \to G/N$, so daß für alle $h \in H$ gilt $\beta(h) = \alpha(h)$.

Beweis:

Ist $x \in G_0$ mit der Darstellung $x = h_1h_2\ldots h_n$ in Elementen von H, so sei

$\beta(x) = h_1h_2....h_n$. Man überlegt sich leicht, daß dadurch die Abbildung $\beta : G_0 \rightarrow G/N$ wohldefiniert ist. Weiter folgt aufgrund der gemachten Voraussetzungen, daß β ein Isomorphismus ist.

2.22. SATZ:

Sei $X = X(G,H)$ und $N \leqslant G$. Sei $Y = X(G/N,\underline{H})$, wobei $\underline{H} = \{hN \mid h \in H - N]$ ist.

Für $n \in |N$ sei definiert $U_n = (H \cup [e])^n$. Sei $n \in \mathbb{N}$.

Ist dann $U_{n+1} \cap N = [e]$, so sind die Graphen $X^{n/2}$ und $Y^{n/2}$ isomorph.

Beweis:

Sei $U_{n+1} \cap N = [e]$. Sei $W = W(G,H)$ und $W_1 = \{x = e \mid x \in N\}$.

Sei $G_0 = \langle H \mid W \cup W_1 \rangle$ und $\alpha: H \rightarrow \underline{H}$, $h \rightarrow hN$

Nach Lemma 2.21. gibt es dann einen Isomorphismus $\beta : G_0 \rightarrow G/N$, so daß für alle $h \in H$ gilt $\beta(h)=\alpha(h)$.Da insbesondere $U_1 \cap N = \{e\}$ ist, ist H eine CM von G_0.

Sei $X_0 = X(G_0,H)$. Da nun $\beta[H] = \underline{H}$ ist, sind die Graphen X_0 und Y isomorph.

Sei $W_0 = W(G_0,H)$. Dann ist $W_0 \supset W \cup W_1$.

Da $U_{n+1} \cap N =\{e\}$ ist, ist $l(w) > n+1$ für alle $w \in W_1$. Man überlegt sich leicht, daß dann $W_0^{N+1} = W^{n+1}$ ist. Nach Satz 2.17. sind dann die Graphen $X^{n/2'}$ und $X_0^{n/2}$ isomorph. Also sind auch die Graphen $X^{n/2}$ und $Y^{n/2}$ isomorph.

2.22. FOLGERUNG:

Sei $X = X(G,H)$ eine GRR von G und $N \leqslant G$.

Ist dann $U_{n(x)+1} \cap N = [e]$, so ist der Graph $X/N = X(G/N,\underline{H})$ mit $\underline{H} = [hN \mid h \in H\text{-}N\}$ eine GRR von G/N und $\pi(X/N) = \pi(X)$.

3.Die Gruppe A(G,H)

3.1. Definition:

Sei $X = X(G,H)$. Zu $\Phi \in A(X)$ und $x \in V(X)$ sei definiert: $\Phi_x() = \underline{\Phi(x)}^{-1}\, \Phi()\, \underline{x}$

3.2. Lemma: [Im 4, Prop. 1-7]

Es gilt:

1) $\Phi_x \in A_e(X) = A(G,H)$.

2) $\Phi(xy) = \Phi(x)\, \Phi_x(y)$ für alle $y \in V(X)$.

3) $\Phi_x(x^{-1}) = \Phi(x)^{-1}$.

Beweis:

1) $\Phi_x\,(e) = \underline{\Phi(x)}^{-1}\, \Phi(\underline{x}) = e$

2) $\Phi(xy) = \underline{\Phi(x)}\ \underline{\Phi(x)}^{-1} = \Phi\underline{x}(y) = \Phi\,(x)\, \Phi_x(y)$

3) $\Phi_x\,(x^{-1}) = \underline{\Phi(x)}^{-1}\ \underline{\Phi}\ \underline{x}\,(x^{-1}) = \Phi(x^{-1})\, \Phi(e) = \Phi(x^{-1})$

3.3. Definition

Sei $X = X(G,H)$.

Zu $x \in V(X)$ sei definiert: $\underline{\delta_x}$: $A(X) \to A_e(X)$, $\Phi \to \Phi_x$ und δ_x: $\underline{\delta_x}|_{Ae(X)}$. $\Phi \to \Phi_x$.

Zu $U \subset G$ sei definiert: $D_U = \{\delta_x \mid x \in U\}$. Sei definiert: $\beta : G \to D_G$; $x \to \delta_{x-1}$

3.4. LEMMA

1) $\delta_x[\underline{G}] = \{1\}$

2) $\delta_x(\Phi) = \Phi$ für alle $\varphi \in Aut(G,H)$.

3) $\delta_x(\Phi\ \Psi) = \delta_{\Psi(x)}\,(\Phi)\ \delta_x(\Psi)$ für alle $\Phi, \Psi \in A(X)$

4) $\delta x\ \delta y = \delta xy$

5) D_G ist Permutationsgruppe auf $A_e(X)$.

6) Sei F die Menge der Ecken von X, die unter $A_e(X)$ fest bleiben. Dann ist F Untergruppe von G.

7) Es ist $D_F \leq Aut(A_e(X))$.

8) β ist Epimorphismus von G auf D_g.

9) Kern β bleibt unter $A_e(X)$ stabil.

Beweis:

1) Sei $y \in G$. Dann ist $\delta_x(\underline{y}) = \underline{y(x)}^{-1}\ \underline{y}\ \underline{x} = \underline{(yx)}^{-1}\ \underline{yx} = 1$.

2) Sei $\varphi \in Aut(G,H)$ und $z \in G$. Dann ist $\delta_x(\varphi)\,(z) = \varphi(x)^{-1}\ \varphi\ x\,(z) = \varphi(x^{-1})\ \varphi\,(xz) = \varphi(z)$.

Also ist $\delta_x(\varphi) = \varphi$.

3) $\delta_x(\Phi\Psi) = \underline{\Phi\ \Psi(x)}^{-1}\ \Phi\Psi\ \underline{x} = \Phi\Psi(x)^{-1}\ \Phi\ \underline{\Psi(x)}\ \underline{\Psi(x)}^{-1}\ \Psi\ \underline{x =}\ \delta_{\Psi(x)}(\Phi)\ \delta_x(\Psi)$

4)Sei $\Phi \in A(X)$. Dann ist $\delta_y\ \delta_x(\Phi) = \underline{\Phi_x(y)}^{-1-}\ \Phi_x\ \underline{y} = \underline{\Phi(xy)}^{-1-}\ \Phi\ \underline{xy}$. Also ist $\delta_x\ \delta_y = \delta_{xy}$

5) Daß $\delta_x \in S(A(X))$ ist, ergibt sich daraus, daß $\delta_{x\text{^}-1}$ wegen 4) sowohl rechts- als auch linksinvers zu δ_x ist. Ebenfalls aus 4) folgt, daß D_G eine Gruppe ist.

6) Sei $\Phi \in A_e(X)$ und seien $x,y \in F$. Es ist $e \in F$ und es gilt: $\Phi(xy) = \Phi(x)\ \Phi_x(y) = x\ y$. Also ist $xy \in F$ und $F< G$

7) Da $F < G$ ist, ergibt sich aus 4) und. 5), daß D_F eine Permutationsgruppe auf A(X) ist. Seien $\Phi, \Psi \in A_e(X)$ und sei $x \in F$. Wegen 3) gilt dann $\delta_x(\Phi\Psi)=\delta_{\Psi(x)}(\Phi)\delta_x(\Psi)=\delta_x(\Phi)\delta_x(\Psi)$. Da weiter $\delta_x(1) = 1$ ist, ist $\delta_x \in Aut(A_e(X))$.

8) $\beta(e) = 1$. $\beta(xy) = \beta(x)\ \beta(y)$ (siehe 4) .

9) Sei $x \in$ Kern β, und seien $\Phi,\Psi \in A_e(X)$. Es ist $\Phi\Psi = \delta_x(\Phi\Psi) = \delta_{\Psi(x)}(\Phi)\delta_x(\Psi) = \delta_{\Psi(x)}(\Phi)\Psi$. Da $\Phi \in A_e(X)$ beliebig war, ist $\delta_{\Psi(x)} = 1$. Dann ist $\Psi(x)^{-1}$ und auch $\Psi(x)^{-}$Element von Kern β

In Lemma 3.4. ist gezeigt worden, daß die Menge Aut(G,H) unter der Permutationsgruppe D_G fest bleibt. Dann bleibt die Menge $A_e(X)$ - Aut(G,H) unter D_G stabil. Dies führt zu folgender Definition:

3.5. Definition:

Sei X = X(G,H). Sei definiert:

δ^*: $A_e(X)$ - Aut(G,H) $\longmapsto$ $A_e(X)$ - Aut(G,H), $\varphi \longmapsto \varphi|_x$ ($U \leq G$):

$D^*_U = \{\ \alpha^*_x \mid x \in G]$.

β^*: $G \to D_G^*$, $x \to \delta^*_{x\text{^}-1}$

3.6. Bemerkung:

D^*_G ist Permutationsgruppe auf der Menge $A_e(X)$ - Aut(G,H) = M.

Kein Element von M bleibt unter D^*_G fest. β^* ist ein Epimorphismus von G auf D_G.

3.7. Folgerung: [Im 4, Prop 1-1]

Sei X = X(G,H). Sei $\varphi \in A_e(X)$ und $x \in G$. Ist $\varphi \neq 1$, so ist auch $\varphi_x \neq 1$.

3.8. Folgerung: [Im 5, Cor 1-3]

Sei X = X(G,H) und $|A_e(X)| = 2$. Dann ist $A_e(X)$= Aut(G.H).

Beweis:

Sei A (X) = {1, α}. Da 1 unter D_G fest bleibt, bleibt auch α unter D_G fest. Also ist α nach Lemma 3.4. aus Aut(G,H).

3.9. LEMMA:

Sei X = X(G,H).

1) Ist $\varphi \in A_e(X)$, so gilt $\alpha^*_x(\varphi) = \varphi$ für alle $x \in G \Leftrightarrow \varphi \in Aut(G,H)$.

2) Genau dann ist $\underline{G}$ normal in A(X), wenn $A_e(X)$ = Aut(G,H) ist.

Beweis:

1) Sei $\varphi \in Aut(G,H)$ und seien. $x,y \in G$.

Dann ist $\alpha^*_x(\varphi)(y) = \varphi(x)^{-1}\ \varphi\ x(y) = \varphi(x^{-1})\ \varphi(xy) = \varphi(y)$

Für alle $x \in G$ gelte umgekehrt $\alpha_x(\varphi) = \varphi$. Dann ist $\varphi\ (xy) = \varphi(x)\ \varphi_x(y) = \varphi(x)\ \varphi(y)$.

Also ist dann $\varphi \in Aut(G,H)$.

2) Sei $\underline{G}$ normal in A(X). Sei $\varphi \in A_e(X)$ und $a \in G$.

Dann gibt es ein $b \in G$, so daß $\varphi\ \underline{a}\ \varphi^{-1} = \underline{b}$ ist.

Aus $b = \underline{b}^{-1}\ \varphi\ \underline{a} = \varphi(a)^{-1}\ \varphi^{-1}(e) = \varphi(a)$ folgt, daß $\varphi = \underline{b}\ \ \varphi\ \ \underline{a} = \varphi_a$ ist.

Da dies für alle $a \in G$ gilt, folgt aus Teil 1) des Lemmas, daß $\varphi \in Aut(G,H)$ ist.

Also ist dann $A_e(X)$ = Aut(G,H).

Sei umgekehrt $A_e(X)$ = Aut(G,H) und $\varphi \in A_e(X)$.

Für alle a und alle x aus G gilt dann: $\varphi\ \underline{a}\ \varphi^{-1}(x) = \varphi(a\ \varphi^{-1}(x)) = \varphi^{-}(a)\ x$.

Also ist dann $\varphi\ \underline{a}\ \varphi^{-1} = \underline{\varphi(a).}$

Damit ist gezeigt, daß $\underline{G}$ normal in A(X) ist.

3.10. LEMMA:

Sei G eine Gruppe, und seien H und K CM von G.

1) Genau dann ist $A(G,H) \leqslant A(G,K)$, wenn K unter A(G,H) stabil bleibt.

2) Genau dann ist A(G,H) = A(G,K), wenn K unter A(G,H) und H unter A(G,K) stabil bleibt.

Beweis:

1) Sei $A(G,H) \leqslant A(G,K)$. Dann ist K stabil unter A(G,H) nach Definition von A(G,K).

Sei K stabil unter A(G,H). Sei $\Phi \in A(G,H)$.

Dann ist $\Phi(e) = e$ und $\Phi[xK] = \Phi(x)\ \Phi_x[K] = \Phi(x)\ K$ für alle $x \in G$.

Also ist $\Phi \in A(G,K)$ und deshalb $A(G,H) \leqslant A(G, K)$.

Die Aussage 2) der Behauptung folgt unmittelbar aus Teil 1).

3.11. Satz ([No-Wa 1, Prop. 2-3 und Cor. 2-4]), [Im 4, Cor. 1-4]
Sei X = X(G,H). Die Menge $K \subset G$ bleibe unter A (X) fest. Dann bleibt auch die Menge <K> unter $A_e(X)$ fest. Bleibt K unter A (X) fest, und ist <K>=G, so ist X eine GRR von G.

Beweis:

1) K bleibe unter $A_e(X)$ fest.
Ist $x \in K^{-1}$ und $\varphi \in A(X)$, so ist $\varphi(x) = (\varphi_x(x^{-1}))^{-1} = (\varphi(x^{-1}))^{-1} = x$ (siehe Lemma 3.2.).
Also bleibt auch K^{-1} unter A (X) fest.
Sei $K_1 = K \cup K^{-1}$ und $x \in$ <K>. Sei $x = x_1 x_2 \ldots x_n$ eine Darstellung von x mit Elementen x_i aus K_1. Dann ist: $\varphi(x) = \varphi(x_1)\, \varphi_{x1}(x_2) \ldots \varphi_{x1\, x2 \ldots xn-1}(x_n) = x_1.x_2 \ldots x_n = x$
Also bleibt x unter φ fest. Da $x \in$<K> und $\varphi \in A_e(X)$ beliebig gewählt waren, bleibt <K> unter $A_e(X)$ fest.
2) Bleibt K unter $A_e(X)$ fest, und ist <K> = G, so bleibt nach Teil i) des Beweises G unter $A_e(X)$ fest, was bedeutet, daß X eine GRR von G ist.

3.12. Satz: ([No-Wa 1, Prop. 2-1]), [Im 4, Cor. 1-5]
Sei X = X(G,H). Die Menge $K \subset G$ bleibe unter $A_e(X)$ stabil.
Dann bleibt auch jede der Mengen K^i ($i \in \mathbf{Z}$) und die Menge <K> unter $A_e(X)$ stabil.

Beweis:

Sei $\varphi \in A_e(X)$ und $x \in K^{-1}$. Nach Lemma 3.2.,3) gilt dann $\varphi(x) = (\varphi_x(x^{-1}) \in K^{-1.}$
Also bleibt die Menge K^{-1} unter $A_e(X)$ stabil.
Um zu zeigen, daß jede der Mengen K^i ($i \in \mathbf{Z}$) unter $A_e(X)$ stabil bleibt, genügt es, zu zeigen, daß dies für alle $i \in \mathbb{N}$ der Fall ist. Sei $n \in$ |N. Die Behauptung sei bewiesen für alle $i \leqslant n$. Sei $x = yy_n \in K^{n+1}$, wobei $y \in K$ und $y_n \in K^n$ ist. Sei $\varphi \in A_e(X)$.
Dann ist: $\varphi(x) = \varphi(y\, y_n) = \varphi(y)\, \varphi_y(y_n) \in K^*K^n = K^{n+1}$. Also bleibt auch die Menge K^{n+1} unter $A_e(X)$stabil. Dann gilt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$. Es ist <K> = $\cup_{i \in Z} K^i$.
Also bleibt auch die Menge <X> unter A (X) stabil.

3.13. LEMMA:
Sei X = X(G,H). Seien K, $M \subset G$.
1) Für alle $\Phi \in A_e(X)$ sei $\Phi[K] \subset M$. Dann ist $\Phi[$<K>$] \subset$ <M> für alle $\Phi \in A_e(X)$.
2) Für alle $\Phi \in A_e(X)$ - {1} sei $\Phi[K] \subset M$. Dann ist $\Phi[$<K>$]\subset$<M> für alle $\Phi \in A_e(X)$ - {1}.

Beweis:

1) Sei $\Phi \in A_e(X)$ und $x \in K^{-1}$. Dann ist $\Phi(x) = (\Phi_x(x^{-1}))^{-1} \in M^{-1}$.

Sei K, = K $\in$ K“^{1} und $M_1 = M \cup M^{-1}$. Dann ist $\Phi[K_1] \subset M_1$ für alle $\Phi \in A_e(X)$.

Sei $x \in K$. Dann gibt es Elemente $k_1,k_2,...,k_n$ aus K_1, so daß $x = k_1k_2...k_n$ ist.

Dann ist: $\Phi(x) = \Phi(k_1)\ \Phi_{k1}(k_2)\ \dots\ \Phi_{k1\ k2..kn-1}(k_n) \in M_1^n \subset <M>$. Also ist $\Phi[<K>)] \subset <M>$.

2) Die Aussage 2) folgt aus der Aussage 1) unter Berücksichtigung der Folgerung 3.7.

3.14. SATZ:

Sei X = X(G,H).

Sei $K \subset G$, so daß $K = K^{-1}$ ist und K unter $A_e(X)$ stabil bleibt. Für alle $\varphi \in A_e(X)$ gelte $\varphi|_K \in \{1|_K, \alpha|_K\}$, wobei $\alpha \in A_e(X) - \{1\}$ ist. Sei definiert:

$K_1 = \{ x \in K \mid \alpha(x) \neq x \}$; $K_2 = \{x \in K \mid \alpha(x) = x]$; $K_3 = < K_1> <K_2>$

Dann bleibt K_3 unter $A_e(X)$ stabil, und für alle $\varphi \in A_e(X)$ gilt $\varphi|_{K3} \in \{1|_{K3}, \alpha|_{K3}\}$.

Beweis:

Sei $A_1 = \{ \varphi \in A_e(X) \mid \varphi|_K = 1|_K \}$, $A_2 = \{ \varphi \in A_e(X) \mid \varphi|_K = \alpha|_K \}$,

$B_1 = \{ \varphi \in A_e(X) \mid \varphi|_{K3} = 1|_{K3} \}$, $B_2 = \{ \varphi \in A_e(X) \mid \varphi|_{K3} = \alpha|_{K3} \}$

Wir zeigen durch Induktion, daß $B_1 = A_1$ ist. Da K_2 unter $A_e(X)$ fest bleibt, bleibt auch $<K_2>$ unter $A_e(X)$ stabil. Sei $\varphi \in A_1$.

Für alle.i $\leq$ n gelte $\varphi|K_1^i = 1|K_1^i$. Sei $x = y\, y_n \in K_1^{n+1}$, wobei $y \in K$ und $y_n \in K_n$ ist.

Dann ist: $\varphi(x) = \varphi(yy_n) = \varphi(y)\ \varphi_y(y_n) = y\ \varphi_y(y_n)$ •

Da $K_1 = K_1^{-1}$ ist, ist $y^{-1} \in K_1$. Also ist $\varphi(y^{-1}) \neq y^{-1}$. Andrerseits ist $\varphi_y(y^{-1}) = (\varphi(y))^{-1} = y^{-1}$.

Daraus folgt, daß $\varphi \in A_1$ ist. Nach Induktionsannahme ist $\varphi(x) = y\ \varphi_y(y_n) = y\ y_n = x$.

Also ist $\varphi|_{K1\wedge n+1} = 1|_{K1\wedge n+1}$ für alle $\varphi \in A_1$.

Dann gilt diese Aussage aber auch für alle $n \in$ |N,

und deshalb ist $\varphi|_{<K1>} = 1|_{<K>}$ für alle $\varphi \in A_1$.

Sei nun $\varphi \in A_1$ und $z = xy \in K_3$ mit $x \in K_1$.

Dann ist: $\varphi(z) = \varphi(x\ y) = \varphi(x)\ \varphi_x(y) = x\ \varphi_x(y) = xy = z$.

Also ist $\varphi|_{K3} = 1|_{K3}$ für alle $\varphi \in A_1$. Das bedeutet aber, daß $B_1 = A_1$ ist.

Sei nun $\varphi \in A_2$. Dann ist $(\alpha^{-1}\varphi)|_K = 1|_{K3}$.Also ist $\alpha^{-1}\varphi \in A_1 = B_1$. Dann ist $(\alpha^{-1}\varphi)|_{K3} = 1|_{K3}$ und deshalb $\varphi|_{K3} = \alpha|_{K3}$.Das bedeutet nun, daß B_2 -= A_2 ist.

Also ist $A_e(X) = A_1 \cup A_2 = B_1 \cup B_2$, was die Behauptung ist.

3.15. Folgerung:

Sei X = X(G,H). Sei Aut(G,H) = $\{ 1, \alpha\}$.

Sei K c G, so daß gilt: $K = K^{-1}$, K bleibt stabil unter $A_e(X)$,$<K> = G$.

Gilt dann

i) $\varphi|_K \in \mathrm{Aut}(G,H)|_K$ für alle $\varphi \in A_e(X)$

ii) $\alpha(x) \neq x$ für alle $x \in K$

so ist X eine ARR von G.

3.16. SATZ: [No-Wa 1, Prop 2-2], [Im 5, Prop 1.9]

Sei $X = X(G,H)$. Sei $a < G$,so daß für alle $\varphi \in A_e(X)$ gilt $\varphi(a) \in \{a, a^{-1}\}$.

Ist $\varphi \in A_e(X)$, so ist entweder $\varphi(a^i) = a^i$ für alle $i \in Z$ oder $\varphi(a^i) = a^{-i}$ für alle $i \in Z$.

Beweis:

Sei $\varphi \in A_e(X)$. Mit Lemma 3.2., 3.) ergibt sich $\varphi(a^{-1}) \in \{a, a^{-1}\}$.

Also bleibt die Menge $\{a, a^{-1}\}$ unter $A_e(X)$ stabil.

Dann ist $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$. Es genügt also, die Aussage für alle $i \in \mathbb{N}$ zu beweisen.

a) Sei $\varphi \in A_e(X)$, so daß $\varphi(a) = a$ ist. Sei $n \in \mathbb{N}$.

Wir nehmen an, daß $\varphi(a^i) = a^i$ ist für alle $i \in \{1,..,n\}$.

Dann ist $\varphi(a^{n+1}) = \varphi(a^n)\, \varphi_{a^\wedge n}(a) \in \{a^{n+1}\ a^{n-1}\}$. Da bereits $\varphi(a^{n-1}) = a^{n-1}$ ist, ist $\varphi(a^{n+1}) = a^{n+1}$.

Also ist $\varphi(a^n) = a^n$ für alle $n < \mathbb{N}$.

b) Sei $\varphi \in A_e(X)$, so daß $\varphi(a) = a^{-1}$ ist. Dann ergibt sich der Beweis der Behauptung durch einen zum Teil a) analogen Induktionsbeweis.

3.17. LEMMA:

Sei $X = X(G,H)$. Sei $K \subset G$, so daß K unter $A_e(X)$ stabil bleibt. Gilt dann:

i) $\ddot{A}_e(X)|_K = \mathrm{Aut}(G,H)|_K$ und

ii) $\Phi \in A_e(X)\ \wedge \Phi|_K = 1|_K \Rightarrow \Phi = 1$,

so ist $A_e(X) = \mathrm{Aut}(G,H)$.

Beweis:

Sei $\Phi \in A_e(X)$. Wegen i) gibt es ein $\varphi \in \mathrm{Aut}(G,H)$, so daß

$\varphi^{\ 1}\Phi|_K = 1|_K$ ist. Wegen ii) ist dann $\varphi^{\ 1}\Phi = 1$. Also ist $\varphi = \Phi \in \mathrm{Aut}(G,H)$.

3.18. SATZ:

Sei $X = X(G,H)$, so daß $A_e(X) = \mathrm{Aut}(G,H)$ ist.

Dann ist A(X) isomorph zur Gruppe $V = \langle G, A_e(X) \mid \Phi^{-1} x \Phi = \Phi^{-1}(x)\ (\Phi \in A_e(X), x \in G)\rangle$

Beweis:

Es ist $A(X) = \underline{G}\, A_e(X)$. Da $A_e(X) = \mathrm{Aut}(G,H)$ ist, ist G nach Lemma 3.3. normal in A(X).

Also ist A(X) semidirektes Produkt von $\underline{G}$ mit $A_e(X)$.

Sei die Abbildung β definiert durch $\beta : A(X) \to V$, $x \to \Phi\, x$. Dann ist β bijektiv.

Wir zeigen, daß β ein Isomorphismus ist. Es ist $\beta(1) = e$. Seien $\underline{x}\Phi$, $\underline{y}\Psi \in A(X)$.

Dann ist $\beta(\underline{x}\Phi\ \underline{y}\Psi) = \beta(\underline{x}\ \underline{\Phi(y)}\ \Phi\Psi) = x\Phi(y)\ \Phi\Psi = x\ \Phi\Phi^{-1}(\Phi(y))\ \Psi = x\ \Phi\ y\ \Psi$.

Damit ist alles gezeigt.

3.19. LEMMA:

Sei L eine abelsche Gruppe mit $\exp(L) > 2$ und X eine ARR von L.

Dann ist $A(X) = GDH(L)$.

Beweis:

Es ist $A_e(X) = \{1, inv\} \simeq Z_2$.

Dann ist nach Satz 3.18. $A(X) \simeq \langle d^2 = e, dxd = x^{-1}\ (x \in L)\rangle = GDH(L)$

3.20. LEMMA:

Sei $G = \langle L, b\rangle$ eine GDC-Gruppe der abelschen Gruppe L und X eine ARR von G.

Dann ist A(X) isomorph zu der zu G gehörenden GDCH Gruppe.

Beweis:

Sei $X = X(G,H)$. Dann ist $A(X) = Aut(G,H) = \{ 1, \beta\}$ mit $\beta(b) = b^{-1}$ und $\beta|_L = 1$.

Nach Satz 3.18. ist dann $A(X) \cong \langle G,d \mid d^2 = e,\ dbd = b^{-1},\ dxd = x\ (\forall\ x \in L) \rangle$.

Sei $s = db$. Dann ist $A(X) \cong \langle G,s \mid s^2 = e,\ sbs = b^{-1},\ sxs = x\ (\forall x \in L) \rangle$.

Die letztere Gruppe ist aber die zu G gehörende GDCH-Gruppe.

4. Die Gruppe Aut(G,H)

4.1. Definition:

Sei G eine Gruppe, $x \in G$, $U \subset G$ und $\varphi \in Aut(G)$.

Sei definiert:

1. $(x) = \{x, x^{-1}\}$
2. $U^* = \{ (x) \mid x \in U\}$
3. $\varphi^*\colon\ G^* \longmapsto G^*,\ (x) \longmapsto (\varphi(x))$
4. die Cayley-Zahl $c(\varphi)$ von φ durch $c(\varphi) = |\{(x) \in g^* \mid \varphi^*((x)) \neq (x)\}|$
5. $Aut^*(G) = \{ \varphi^* \mid \varphi \in Aut(G) \}$
6. $Aut0(G) = \{ \varphi \in Aut(G) \mid c(\varphi) = 0\}$
7. $Aut^*(G,U) = \{ \varphi^* \mid \varphi \in Aut(G,U) \}$
8. $a^*(G,U.) = |Aut^*(G,U)|$
9. $a0(G) = |Aut0(G)|$

4.2. Definition:

Sei G eine Gruppe und O_i (i = 0,1,...,r) die **Orbits von Aut(G)**, wobei $O_0 = \{e\}$ sei.
Sei H eine Cayley-Menge von G. Das ungeordnete Mengenpaar $\{H \cap O_i, O_i - H \}$ bezeichnen wir als Schnitt der CM H mit dem Orbit O_i.
Zwei CM H und K werden **a-äquivalent** genannt, wenn es eine zu H isomorphe CM $\underline{H}$ gibt, so daß die Schnitte, die H und K mit den Orbits bilden, gleich sind.
Der Begriff "a-äquivalent" induziert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der CM von G. Die Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation, die ein CES von G enthalten, seien als A-Klassen von G bezeichnet. Meinen wir alle Äquivalenzklassen, so sprechen wir von den A-Klassen der CM von G

4.3. LEMMA:

Sei G eine Gruppe und H eine Cayley-Menge in G.
Dann ist Aut*(G,H) eine Gruppe. $Aut_0(G)$ ist normale Untergruppe von Aut(G,H), und es ist: $Aut^*(G,H) = Aut(G,H)/Aut_0(G)$. Weiter gilt: $a(G,H) = a^*(G,H) \cdot a_0(G)$

Beweis:

Es ist klar, daß Aut(G,H) eine Gruppe ist.

Sei $\alpha : Aut(G,H) \longmapsto Aut^*(G,H)',\ \varphi \longmapsto \varphi^*$.

Dann ist $\alpha(1) = 1^*$. Seien $\varphi, \psi \in Aut(G,H)$. Dann ist:

$\alpha(\varphi\psi)((x)) = (\varphi\psi((x)) = \varphi^*\psi(x) = \varphi^*(\psi(x)) = \varphi^*\psi^*((x)) = \alpha(\varphi)\ \alpha(\psi)((x))$.

Also ist $\alpha(\varphi\psi) = \alpha(\varphi)\,\alpha(\psi)$. Also ist α ein Epimorphismus. Man überlegt sich leicht, daß Kern $\alpha = Aut_0(G)$ ist. Also ist $Aut_0(G)$ Normalteiler von Aut(G,H; und es gilt: $Aut^*(G,H) \simeq Aut(G,H)/Aut_0(G)$. Daraus folgt sofort, daß $a(G,H) = a^*(G,H) * a_0(G)$ ist.

4.4. Definition:

Sei G eine Gruppe. Der Begriff "c-äquivalent" induziert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der CM von G. Die aus CES bestehenden Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation seien als **C-Klassen** von G bezeichnet. Meinen wir alle Äquivalenzklassen, so sprechen wir von den C-Klassen der CM von G.

4.5. LEMMA:

Sei G eine Gruppe und seien H und K CM von G

1) Genau dann ist $Aut(G,H) \leqslant Aut(G,K)$, wenn K unter Aut(G,H) stabil bleibt.

2) Genau dann ist Aut(G,H) = Aut(G,K), wenn K unter Aut(G,H) und H unter Aut(G,K) stabil bleibt.

Beweis:

1) Sei $Aut(G,H) \leqslant Aut(G,K)$.

Nach Definition von Aut(G,K) bleibt dann K stabil unter Aut(G,H).

Sei K stabil unter Aut(G,H). Dann ist $\Phi[K] = K$ für alle $\Phi \in Aut(G,H)$.

Also ist $Aut(G,H) \leqslant Aut(G,K)$.

2) Die Aussage der Behauptung folgt unmittelbar aus Teil 1) des Beweises.

4.6. LEMMA:

Sei G eine Gruppe und seien H und K Cayleymengen von G.

1) Gehören H und K zur selben C-Klasse der CM von G, so sind die Gruppen A(G,H) und A(G,K) als Permutationsgruppen isomorph. Insbesondere ist c(G,H) = c(G,K).

2) Gehören H und K zur selben A-Klasse der CM von G, so sind die Gruppen Aut(G,H) und Aut(G,K) als Permutationsgruppen isomorph. Insbesondere ist c(G,H) = c(G,K).

3) Die Relation c-äquivalent" ist als Äquivalenzrelation feiner als die Relation "a-äquivalent".

Beweis:

1) Seien H und K aus der gleichen C-Klasse von G.
   Sei X =X(G,H) und Y = X(G.K).Nach Lemma 2.4. ist dann der Graph X isomorph zum Graphen Y oder Y'. Also ist $A(G,H) = A_e(X) \cong A_e(Y') = A_e(Y) = A(G,K)$ und zwar als Permutationsgruppe.

2) Seien H und K aus der gleichen A-Klasse von G. Seien O_i die Orbits von Aut(G), wobei O_0 ={e} ist. Sei $\underline{H}$ eine zu H isomorphe CM, so daß für $1 \leqslant i \leqslant r$ gilt.
$\{\underline{H} \cap O_i, \underline{H} - O_i\} = \{K \cap O_i, K - O_i\}$.
Für jedes $i \in \{1,2,..r\}$ ist nun Aut $(G,\underline{H} \cap O_i) = \mathrm{Aut}(G,O_i - \underline{H}) = \mathrm{Aut}(G,K \cap O_i)$.
Weiter ist $\mathrm{Aut}(G,\underline{H}) = \cap_{1<i<r}$ Aut $(G,\underline{H} \cap O_i)$ und $\mathrm{Aut}(G,\underline{K}) = \cap_{1<i<r}$ Aut $(G,\underline{K} \cap O_i)$.
Also ist $\mathrm{Aut}(G,\underline{H}) = \mathrm{Aut}(G,\underline{K})$. Da Aut(G,H) in Aut(G) konjugiert ist zu $\mathrm{Aut}(G,\underline{H})$ ist, sind Aut(G,H) und Aut(G,K) als Permutationsgruppen isomorph.

3) Sind H und K c-äquivalent, so sind sie auch a-äquivalent, wie unmittelbar folgt.

4.7. Definition:

Sei X = X(G,H) eine MRR der Gruppe G. Dann heiβt X **minimale MRR**, wenn X in der Menge der MMR‘s von G bezüglich des Eckengrads minimal ist, d.h. wenn gilt:
|H|=min { IK| | c(G,K) = c(G)).

4.8. Definition:

Unter einem **Repräsentantensystem(RS)** der C-Klassen bzw. A-Klassen einer Gruppe G verstehen wir immer ein System minimaler Repräsentanten H, wobei H stets ein CES ist. Unter einem Repräsentantensystem (RS) der C-Klassen bzw A-Klassen der CM einer Gruppe G verstehen wir ein System minimaler Repräsentanten H, wobei H eine CM von G ist.

4.9. Vereinbarung:

Für eine Anzahl von Gruppen G werden wir ein RS der C-Klassen bzw. A-Klassen (der CM) von G angeben. Bei einem RS der C-Klassen werden die Repräsentanten mit arabischen Zahlen nummeriert. Bei einem RS der A-Klassen werden die Repräsentanten mit römischen Zahlen nummeriert. Die Nummerierung geschieht dabei stets so, daß die Repräsentanten H bezüglich ihrer Mächtigkeit geordnet sind.

4.10. Bemerkung:

Um eine minimale MRR einer Gruppe G zu bestimmen, gehen wir so vor, daß wir im RS der A-Klassen von G den ersten Repräsentanten H suchen, für den a(G,H) = a(G) ist. Dann bestimmen wir ein RS der C-Klassen, die in der von H repräsentierten A-Klasse enthalten sind. In diesem RS bestimmen wir den ersten Repräsentanten K für den c(G,K) = a(G ist. Gibt es keinen solchen Repräsentanten, so gehen wir zur nächsten A-Klasse mit a = a(G) über und wiederholen den Prozess.

4.11. Definition:

Sei G eine Gruppe.

Die Menge der Cayleymengen von G sei mit CM(G) bezeichnet.

Die Menge der Cayleyerzeugendensysteme von G sei mit CES(G)

Bezeichnet. Ist n∊ !N, so sei $CM_n(G)$ = [H ∊ CM(G) | |H| = n} und

$CES_n(G)$ = {H∊CES(G) | |H| = n}. Ist H∊CM(G), so sei A(H) ={Φ[H] | Φ ∊Aut(G)}.

4.12. LEMMA:

Sei G eine Gruppe und H ⊂ CM(G), so.daß H unter Aut(G) stabil bleibt.

Sei $\{H_1, H_2, .., H_k\}$ ein Repräsentantensystem der Orbits $A(H_i)$(1 < i < k) von Aut(G) auf H.

Dann ist $\frac{|H|}{|\mathrm{Aut(G)}\,|} = \sum_{i=1}^{k} \ \frac{1}{\mathrm{a(Hi)}}$

Beweis:

Aut(G) kann aufgefaβt werden als Permutationsgruppe auf X.

Für alle H ∊ X. ist a(H) • |A(H)| = |Aut(G)|. Ferner ist $\sum_{i=1}^{k}$ | A($\underline{H_i}$)| = |H|.

Daraus folgt die Behauptung.

4.13. Folgerung:

Sei G eine Gruppe und X⊂CM(G), so daß X unter Aut(G) stabil bleibt.

1) min{a(G,H) l H∊X } ⩾ |X|/|Aut(G)|

2) Die Anzahl der Cayleyklassen K in X, für die a(G,K)= 1 ist, ist <|X| / |Aut(G)|

4.14. LEMMA:

Sei G = Z_2^5. Dann ist:

1) min{a(G,H)|H∊CM_5(G)} ⩾ 59.

2) min{a(G,H)|H∊CM_6(G)} ⩾ 14

3) min{a(G,H)|H∊CM_7(G)} ⩾ 4

4) min{a(G,H)|H∊CM_8(G)} ⩾ 2

5) In CM_9G) gibt es höchstens 2 Cayleyklassen H mit a(G,H) = 1.

6) In CM_{10}G) gibt es höchstens 4 Cayleyklassen H mit a(G,H) = 1.

7) In CM_{11}G) gibt es höchstens 8 Cayleyklassen H mit a(G,H) = 1.

8) In CM_{12}G) gibt es höchstens 14 Cayleyklassen H mit a(G,H) = 1.

9) In CM_{13}G) gibt es höchstens 18 Cayleyklassen H mit a(G,H) = 1.

10) In CM_{14}G) gibt es höchstens 23 Cayleyklassen H mit a(G,H) = 1.

11) In CM_{15}G) gibt es höchstens 30 Cayleyklassen H mit a(G,H) = 1.

12) In CMG) gibt es höchstens 99 Cayleyklassen H mit a(G,H) = 1.

Beweis:

Es ist [Aut(G)| = 31*30*28*24*16. Sei $0 \leqslant n \leqslant 31$. Dann ist | $CM_n(G)$ | = $\binom{31}{n}$

Für $5 \leqslant n \leqslant 15$ sei definiert: $q_n = \frac{\text{ICM(G)I}}{\text{IAut(G)I}}$

Man rechnet leicht nach, daß dann gilt: $q_5^{-1} = 58{,}8$, $q_6^{-1} = 13{,}6$, $q_7^{-1} = 3{,}8$, $q_8^{-1} = 1{,}2$ und $q_9 = 2{,}01$, $q_{10} = 4{,}43$, $q_{11} = 8{,}47$, $q_{12} = 14{,}11$, $q_{13} = 18{,}46$, $q_{14} = 23{,}73$, $q_{15} = 30{,}06$.
Die Aussagen 1 - 11 der Behauptung ergeben sich nun unmittelbar aus Folgerung 4.13. Jede Cayleyklasse G enthält ein Element H, für das IHI $\leqslant$ 15 ist. Die Aussage 12 der Behauptung ergibt sich durch Summation der in den Aussagen 5 - 11 angegebenen Werte.

4.15. Bemerkung:

Benutzt man die Ergebnisse des Computerprogramms Klass 5 (siehe Anhang 2 und Lemma 10.7.), daß für alle CM H von G mit $|H| \leqslant 11$ $a(G,H)>1$ ist, so ergibt sich 85 als obere Schranke für die Anzahl der Cayleyklassen von G, für die a(G,H) = 1 ist.
Auch diese Abschätzung ist noch sehr grob, so daß die tatsächliche Anzahl der Cayleyklassen von G, für die a(G,H) = 1 ist, und damit auch die Zahl der nicht-äquivalenten GRR's von G wahrscheinlich sehr viel geringer ist.

5. Isomorphie von Cayley-Graphen

5.1. SATZ:

Sei $X_1 = X(G_1,H_1)$ und $X_2 = X(G_2,H_2)$.
Genau dann sind die Graphen X_1 und X_2 isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung $\Phi: G_1 \longmapsto G_2$ gibt, so daß gilt:
i) $\Phi(e) = e$, ii) $\Phi(x)H_1 = \Phi(x)H_2$ für alle $x \in G_1$.
Beweis:
I) Seien X_1 und X_2 isomorph und $\Phi: X_1 \longmapsto X_2$ ein Graphenisomorphismus.
Dann kann man o.B.d.A. annehmen, daß $\Phi(e) = e$ ist. Für jedes $x \in G_1$ ist nun:,
$\Phi[xH_1] = \Phi[N_{X1}(x)] = N_{X2}(\Phi(x)) = \Phi(x)H_2$
II) Sei $\Phi: G_1 \longmapsto G_2$ <P eine bijektive Abb., die die Bedingungen i) und ii) erfüllt. Dann ist für jedes $x \in G_1$: $\Phi[N_{X1}(x)] = \Phi[xH_1] = \Phi(x)H_2 = N_{X2}(\Phi(x))$.
Also ist Φ ein Graphenisomorphismus und die Graphen X_1 und X_2 sind isomorph.

5.2. SATZ:

Seien G_1 und G_2 Gruppen.

Es gebe eine bijektive Abbildung $\beta : G_1 \mapsto G_2$ mit den Eigenschaften:

i) $\beta(e) = e$, ii) $\beta(xy) \in \{ \beta(x)\beta(y), \beta(x)\beta(y^{-1})]$ für alle $x,y \in G_1$.

Dann ist jeder CG der Gruppe G_1 isomorph zu einem CG der Gruppe G_2.

Beweis:

Sei $X_1 = X(G_1,H_1)$ ein CG der Gruppe G_1. Sei $H_2 = \beta[H_1]$

Dann ist $e \neq H_2$. Ist $y \in H_2$, so gilt mit $x = \beta^{-1}(y)$: $e = \beta(e) = \beta(xx^{-1}) \in \beta(x) \{\beta(x^{-1}), \beta(x)\}$.

Also ist $y^{-1} = \beta(x^{-1}) \in \beta[H_1] = H_2$. Daraus folgt, daß H_2 eine CM ist.

Sei $X_2 = X(G_2,H_2)$. Dann ist für jedes x € G_1 : $\beta[xH_1] = \beta(x)H_2$.

Nach Satz 5.1. sind dann die Graphen X_1 und X_2 isomorph.

5.3. LEMMA:

Sei L eine abelsche Gruppe und. $L_1 = L \times Z_2$. Dann ist jeder Cayley-Graph der Gruppe L_1 isomorph zu einem Cayley-Graphen der Gruppe GDH(L).

Beweis:

Sei $L_1 = L \times <d>$ und $G = GDH(L) = <L,D \mid D^2 = E$ ($DXD = X^{-1}$ $(X \in L)>$.Sei β definiert durch $\beta(x) = X$ für alle $x \in L$ und $\beta(xd) = XD$ für alle x € L. Dann hat β die in Satz 5.2. geforderten Eigenschaften. Die Aussage des Lemmas ergibt sich nun aus Satz 5.2.

5.4. LEMMA:

Sei L eine abelsche Gruppe und G eine GDC-Gruppe der Gruppe L. Dann ist jeder Cayley-Graph der Gruppe G isomorph zu einem Cayley-Graphen der Gruppe GDH(L).

Beweis:

Sei $\underline{G} = GDH(L)$. Sei $b \in G - L$ und $D \in \underline{G} - L$.

Die Abb. β: G —> G sei definiert durch : $\beta(x) = X$ und $\beta(bx) = DX$ für alle $x \in L$.

Dann hat β die in Satz 5.2. geforderten Eigenschaften, und die Aussage des Lemmas folgt aus Satz 5.2.

5.5. LEMMA:

1) Jeder CG der Gr. $G= Q \times Z_2^n$ $(n\in \mathbb{N})$ ist isomorph zu einem CG der Gr. $L = Z_4 \times Z_2^{n+1}$.

2) Jeder CG der Gruppe $L = Z_4 \times Z_2^n$ ist isomorph zu einem CG der Gruppe $\underline{L} = Z_2^{n+2}$.

3) Jeder CG der Gr. $G= Q \times Z_2^n$ $(n\in \mathbb{N})$ ist isomorph zu einem CG der Gr. $L = Z_2^{n+3}$.

Beweis:

1) Sei $L_q = Z_4 \times Z_2^n < G$. Sei $b \in G - L_0$ und $c = b^2$ und $L = L_q \times < B \mid B^2 = E>$.

Sei $\beta : G \to L$ definiert durch: $\beta(x) = X$ und $\beta(bx) = BX$ für alle $x \in L_0$.

2) Sei $L_q = Z_2^n$.und $L = L_0 \times \langle a \mid a^4 = e \rangle$. Sei $\underline{L} = L_0 \times \langle A,D \mid A^2 = D^2 = E \rangle$.

Sei $\beta : L \longrightarrow \underline{L}$ definiert durch : $\beta(a) = A$, $\beta(a^2) = D$, $\beta(a^-1) = AD$ und $\beta(xy) = \beta(x)Y$ für alle $x < L$ und alle y € L_0.

3) Sei $L_0 = Z_2{}^n$ und $G = \langle a,b \mid a^4 = e, b^2 = a^2, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$.

Sei $L = \langle A,B,D \mid A^2 = B^2 = D^2 = E \rangle$ Sei $x \in L_0$.

Sei $\beta : G \longrightarrow L$ definiert durch:

$\beta(a)=A$, $\beta(b)=B$, $\beta(a^2)=D$, $\beta(ab) =AB$, $\beta(a^{-1}) =AD$, $\beta(b^{-1})=BD$, $\beta(ab^{-1})=ABD$, $\beta(xy) = \beta(x)y$ für alle $x \in G$ und alle $y \in L_0$.

Dann hat β in jedem der drei Fälle die in Satz 5.2. geforderten Eigenschaften. Dann folgt die Aussage aus Satz 5.2.

II. CAYLEY-GRAPHEN VON GRUPPENERWEITERUNGEN

6. Zyklische Erweiterungen von Gruppen

6.1. Definition:

1) Eine Gruppe G_1 heiβt **Erweiterung der Gruppe G** durch die Gruppe U, wenn G_1 normal in G und $G_1/G = U$ ist.

2) Eine Gruppe G_1 heiβt **semidirektes Produkt** der Gruppe G mit der Gruppe U, wenn

i) $G < G$, $U< G$ und

ii) $G \cap U =\{e\}$, $G_1 = GU$ ist.

3) Eine Gruppe G_1 heiβt **direktes Produkt** der Gruppen G und U, wenn G und U Untergruppen von G sind, die elementweise kommutieren, und gilt: $G \cap U = \{e\}$ und $G_1 = GU$.

Das direkte Produkt der Gruppen G und U wird mit G x U bezeichnet.

Da wir im Wesentlichen nur Erweiterungen von Gruppen durch zyklische Gruppen benötigen, werden wir uns auf die Theorie dieser Erweiterungen beschränken.

6.2. Definition:

Die Gruppe G_1 sei Erweiterung der Gruppe G durch die zyklische Gruppe Z_n, wobei $n \geqslant 2$ ist.

1) Ist $b \in G_1 - G$, so daß $G_1 = \langle G,b \rangle$ ist, so heiβt b **Repräsentant der Erweiterung**.

2) Der Automorphismus β: $G \longmapsto G$, $x \longmapsto b^{-1}xb$ sei als der **von b auf G induzierte Automorphismus** bezeichnet.

3) Sei $c = b^n$. Dann ist $c \in G$. Das Paar (c,β) wird das zum Repräsentanten b gehörende **Parametersystem der Erweiterung** genannt.

6.3. Bemerkung:

Die Gruppe G_1 sei Erweiterung der Gruppe G durch die zyklische Gruppe Z_n, $n \geqslant 2$. Sei b ein Repräsentant der Erweiterung und (c,β) das zu b gehörende Parametersystem der Erweiterung. Dann ist $\beta(c) = c$ und $\beta (x) = c^{-1}xc$ für alle $x \in G$

.

6.4. LEMMA:

Sei G eine Gruppe und $n \in \mathbb{N}$. Seien $c \in G$ und $\beta \in Aut(G)$ so gewählt, daß gilt: $\beta(c) = c$ und $\beta^n(x) = c^{-1}xc$ für alle $x \in G$. Dann gibt es eine Erweiterung G_1 von G durch die Gruppe Z_n und einen Repräsentanten b der Erweiterung, so daß (c,β) das zu b gehörende Parametersystem der Erweiterung ist.

Beweis:

Sei die Gruppe G_1 definiert durch: $G_1 = \langle G,b \mid b^n = c,\ b^{-1}xb = \beta(x)$ für alle $x \in G\rangle$.

Dann ist G normal in G_1 und $G_1/G = Z_n$. Das Element b ist Repräsentant der Erweiterung und (c,β) das zu b gehörende Parametersystem der Erweiterung.

6.5. LEMMA:

Die Gruppe G_1 sei Erweiterung der Gruppe G durch die Gruppe Z_n, $n > 1$.

1) Gibt es einen Repräsentanten b mit dem Parametersystem (e,β), so ist die Erweiterung semidirektes Produkt.

2) Gibt es einen Repräsentanten mit dem Parametersystem (e,1), so ist die Erweiterung direktes Produkt.

Beweis:

i) Sei b ein Repräsentant der Erweiterung, so daß $b^n = e$ ist. Dann ist $U = \langle b\rangle \simeq Z_n$ und es gilt: $G_1 = GU$ und $U \cap G = \{e\}$. Also ist die Erweiterung semidirektes Produkt von G mit Z_n.

2) Sei b ein Repräsentant der Erweiterung, so daß (e,1) das zu b gehörende Parametersystem ist. Sei $U = \langle .b\rangle$. Dann ist $U \simeq Z_n$ und die Gruppen G und U kommutieren elementweise. Ferner ist $G \cap U = \{e\}$ und $G_1=GU$. Also ist dann $G_1 = GxU$.

6.6. LEMMA:

Sei G_1 Erweiterung der Gruppe G durch die Gruppe Z_n, n>1. Sei b Repräsentant der Erweiterung und $\{c,\beta\}$ das zu b gehörende Parametersystem. Sei $g \in G$ und $b' = bg$. Dann ist b' Repräsentant der Erweiterung und für das zu b* gehörende Parametersystem (c',β') gilt:

$\beta'(x) = g^{-1}\beta(x)g$ für alle $x \in G$. $c' = c\beta^{n-1}(g)....\beta(g)g$.

Beweis:

Es ist $\beta'(x) = b'^{-1}xb' = g^{-1}b^{-1}xbg = g^{-1}\beta(x)g$ für alle $x \in G$.

Es ist $c'=b'^n= (bg)^n = c\beta^{n-1}(g)...\beta(g)g$.

6.7. LEMMA:

1) Sei G eine GDC-Gruppe der abelschen Gruppe L. Sei. $b \in G - L$ und $c = b^2$.

Dann besitzen alle $b \in G - L$ das Parametersystem {c,inv}.

2) Sei G eine GDH-Gruppe der abelschen Gruppe L.

Dann besitzen alle $d \in G - L$ das Parametersystem {e,inv}.

Beweis:

1) Nach Voraussetzung gibt es ein $b \in G - L$, so daß für das zu b gehörende Parametersystem $\{c,\beta\}$ gilt $o(c) = 2$ und $\beta = inv$. Sei nun $b' = bg \in G - L$, wobei $g \in L$ ist. Nach Lemma 6.6. ist dann $\beta'(x) = g^{-1}\beta(x)g = \beta(x)$. Also ist $\beta' = \beta = inv$.
Weiter ist $c' = c\beta(g)g = c$.
2) Nach Voraussetzung gibt es ein $d \in G - L$, so daß $\{e,inv\}$ das zu d gehörende Paranetersystem ist. Sei $d' = dg$, wobei $g \in L$ ist. Sei $\{c,\beta\}$ das zu d' gehörende Parametersystem. Dann ist $\beta(x) = g^{-1}inv(x)g = inv(x)$ für alle $x \in L$. Also ist $\beta = inv$.
Weiter ist $c = eg^{-1}g = e$.

6.8. LEMMA:

Die Gruppe G_1 sei Erweiterung der Gruppe G durch die zyklische Gruppe Z_p, wobei p eine Primzahl ist. Dann gibt es einen Repräsentanten b der Erweiterung, so daß $c = b^p$ ein Element der p-Sylowgruppe von G ist.

Beweis:

Sei b_0 ein Repräsentant der Erweiterung. Sei $q = o(b_0^P)$. Dann gibt es Zahlen $r,s \in \mathbb{N}_0$, so daß $q = p^r s$ und $(q,s) = 1$ ist. Sei $b = b_0^s$. Da $(q,s) = 1$ ist, ist $G_1 = \langle G,b \rangle$. Sei nun $c = b^p$. Dann ist $c = b_0^{sp}$.
Es ist $e = (b_0^p)^q =.(b_0^p)^{p\wedge r*s} = b_0^{p\wedge(r+1)*s} = (b_0^{ps})^{p\wedge r} = c^{p\wedge r}$.
Also ist $o(c) \mid p^r$. Das bedeutet, daß c in der p-Sylowgruppe von G ist.

6.9. LEMMA:

Die Gruppe G_1 sei Erweiterung der Gruppe G durch die Gruppe Z_n, $n \geqslant 2$. Ist dann $o(G)$ teilerfremd zu n, so ist die Erweiterung semidirektes Produkt.

Beweis:

Sei b ein Repräsentant der Erweiterung und $q = o(b^n)$.
Da $b^n \in G$ ist, ist $q \mid o(G)$. Sei nun $(n,o(G)) = 1$. Dann ist auch $(n,q) = 1$. Sei nun $b_1 = b^q$. Da $(n,q) = 1$ ist, ist b_1 Repräsentant der Erweiterung und es ist $b_1^n = b^{qn} = e$. Nach Lemma 6.5. ist dann G_1 semidirekte Produkt von G und Z_p.

6.10. LEMMA:

Sei G eine Gruppe und. G_1 eine nichtabelsche Erweiterung der Gruppe G durch die Gruppe Z_n, wobei $n \geqslant 3$ eine ungerade Zahl ist. Dann gibt es ein $b \in G_1 - G$, so daß $G_1 = \langle G, b \rangle$ ist und gilt $b^{2n} \neq e$ oder $b^2 \notin Z(G_1)$.

Beweis:

Zur alle Repräsentanten b der Erweiterung gelte $b^{2n} = e$ und $b^2 \in Z(G_1)$.

Sei $x \in G$ und $b' = b^2x$. Da n ungerade ist, ist b' Repräsentant der Erweiterung.

Es gilt dann: i) $e = b'^{2n} = (b^2x)^{2n} = b^{4n} x^{2n} = x^{2n}$ ii) $b^4x^2 = b'^2 \in Z(G_1)$

Also ist $x^{2n} = e$ und $x^2 \in Z(G_1)$ für alle $x \in G$.

Sei nun $y \in G_1$. Dann gibt es ein $i \in \{1,...,n-1\}$ und ein $x \in G$, so daß $y = b^ix$ ist.

Dann ist $y^{2n} = b^{4ni} x^{2n} = e$ und $y^2 = b^{4i}x^2 \in ZG_1)$. Also ist $y^{2n} = e$ und $y^2 \in Z(G_1)$ für alle $y \in G_1$. Sei $U =\{x \in G_1[x^n=e\}$ und $V = \{ x \in G_1|x^2 = e\}$. Dann ist $G_1 = UV$.

Ist $x \in U$, so ist $x = x^{n+1} \in Z(G_1|)$. Daraus folgt, daß U eine Untergruppe von $Z(G_1)$ ist.

Sind $x,y \in V$, so ist: $(xy)^{-n} = (xy)^n = xy(xy)^{n-1} = (xy)^{2-n}$.

Also ist $(xy)^2 = e$ und V eine abelsche Untergruppe von G_1. Dann ist $G_1 = U \times V$.

Also ist G_1 eine abelsche Gruppe im Widerspruch zur Voraussetzung,

6.11. LEMMA:

Die Gruppe G_1 sei Erweiterung der nichtabelschen Gruppe G durch die Gruppe Z_2. Für alle $b \in; G_1 - G$ sei: $b^2 \in Z(G)$ und $o(b) = 4$.

Sei $b \in. G_1 - G$ und (c,β) das zu b gehörende Parametersystem. Sei $\delta: G\text{->} G$,

$x \text{->} \beta(x)x$. Sei $D = <c\delta[G]>$. Dann ist $c \notin \delta([G])$, $D \leq Z(G)$ und $D = Z_2^n$ für ein $n \geqslant 2$.

Insbesondere ist $Z_2^2 \leq Z(G)$ und $o(G) = 4k$, wobei $k \geqslant 4$ keine Primzahl ist.

Beweis:

a) Sei $C = \{b^2 \mid b \in G_1 - G\}$ und $Z_0 = \{x \in Z(G)| x^2 =e\}$.

Nach Voraussetzung ist dann $C \subseteq Z_0$. Nun ist $C = \{c\beta(x)x \mid x \in G\} = c\,\delta(G)$.

Da G nichtabelsch ist, ist $\beta \neq inv_G$. Also ist $\delta(G) \neq \{e\}$.

Da $c \notin \delta[G]$ ist, ist $D \subseteq Z_Q \leq Z(G)$ und $D = Z_2^n$ für ein $n \geqslant 2$.

Insbesondere ist $Z_2 \leq Z(G)$. Sei $k = o(G : Z_2^n)$. Dann ist $o(G) = 4k$.

Ist nun k eine Primzahl, so ist die. z p Faktorgruppe G/Z_2 zyklisch, und deshalb abelsch.

Dann ist aber auch G abelsch, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

6.12. LEMMA:

Sei L eine abelsche Gruppe und. $c \in L$ mit $o(c) = 2$. Dann gibt es eine Standardrepräsentation

Beweis:

Sei $B' = (B – \{a_n\}) \cup \{a_n'\}$. Dann ist B' eine Basis von U, Man überlegt sich leicht, daß daraus die Behauptung- folgt.

6.13. LEMMA:

Sei G eine GDC-Gruppe der abelschen Gruppe L.

Ist $L \neq Z_4 \times Z_2^n$ ($n \in \mathbb{N}$), so ist L die einzige abelsche Untergruppe von Index 2 in G.

Beweis:

Sei $L = Z_4 \times Z_2^n$ und U eine von L verschiedene abelsche Untergruppe vom Index 2 in G.

Dann ist $U - L \neq \emptyset$. Sei $b \in U - L$. Dann ist $b \in G - L$.

Sei $A = \{x \in L \mid x^2 = e\}$. Dann ist $A < L$.

Es ist nun $Zentr(b) = A \cup bA$. Da $b \in U$ und U abelsch ist, ist $U \in Zentr(b)$.

Also ist $o(L) = o(U) \leq o(Zentr(b)) = 2 \cdot o(A)$. Da $A \neq L$ ist, ist $o(L) = 2 \cdot o(A)$.

Das ist aber nur möglich, wenn $L = Z_4 \times Z_2^n$ für ein $n \in N_0$ ist. Also ergibt sich ein Widerspruch. Daraus folgt, daß L die einzige abelsche Untergruppe vom Index 2 in G ist.

6.14. LEMMA:

Sei $G = GDC(4,2) \times Z_2^n = \langle a,b,c_i \mid a^4=b^4=c_i^2=e,\ b^{-1}ab=a^{-1} (1 \leq i \leq n)\rangle$

Ist L eine abelsche Untergruppe vom Index 2 in G, so ist $L = L_1 = \langle a, b, c_1,\ldots,c_n\rangle$ oder $L = \langle x,a^2,c_1,\ldots,c_n\rangle$, wobei $x \in bL$ ist. Ist G GDC-Gruppe von L, so ist $L = L_1$.

Beweis:

Sei L eine abelsche Untergruppe vom Index 2 in G. Dann ist $L \cap \{a,b,ba\} \neq \emptyset$, da sonst $G:L > 2$ ist.

Ist $a \in L$, so ist $L \leq Zentr(a) = L_1$. Dann ist $L = L_1$.

Ist $b \in L$, so ist $L \leq Zentr(b) = \langle b,a^2,c_1,\ldots,c_n\rangle$. Dann ist $L = \langle b,a^2,c_1,\ldots,c_n\rangle$.

Ist $ba \in L$, so ist $L \leq Zentr(ba) = \langle ba? a^2,c_1,\ldots,c_n\rangle$. Dann ist $L = \langle ba, a^2,c_1,\ldots,c_n\rangle$.

Man rechnet leicht nach, daß G keine GDC-Gruppe von L ist, wenn $L \neq L_1$ ist.

6,15. LEMMA:

Sei G eine GDC-Gruppe der abelschen Gruppe L. Sei U eine abelsche Untergruppe von G, so daß G GDC-Gruppe von U ist. Ist dann G keine GQ-Gruppe, so ist U = L.

Beweis:

Sei G keine GQ-Gruppe und angenommen, daß $U \neq L$ ist. Sei $A = L-U$, $B = U-L$ und $C = U \cap L$. Da $o(U) = o(L)$ ist, sind die Mengen A und B nicht leer. Ist $x \in A$ und $y \in U$, so ist $x^{-1}yx = y^1$. Ist $x \in L$ und $y \in B$, so ist. $y^{-1}xy = y^{-1}$;

also ist $x^{-1}yx = yx^2$. Es ist $Z(G) = \{x \in G \mid x^2 = e\}$. Man überlegt sich nun leicht, daß $C = Z(G)$ ist. Ist x e A und $y \in B$,so ist $x^2 = y^2$, wie aus dem obigen folgt.

Sei $a \in A$ und $b \in B$. Dann ist $A = aC$. Also ist $L = A \cup C = \langle a,C \rangle$.

Dann ist $G = \langle a,b \mid a^4 = e, b^2 = a^2, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle \times C$. Also ist G im Widerspruch zur Voraussetzung eine GQ-Gruppe. Daraus folgt, daß $U = L$ ist.

6.16. Folgerung:

Sei G eine GDC-Gruppe der abelschen Gruppe L, aber keine GQ-Gruppe. Dann bleibt L unter Aut(G) stabil.

6.17. LEMMA:

Sei $G = Q * Z_2^n = \langle a,b,c_i \mid a^4 = c_i^2 = e, b^2 = a^2, b^{-1}ab = a^{-1}\ (1 \le i \le n) \rangle$. Dann besitzt G genau drei verschiedene abelsche Untergruppen vom Index 2 in G. Es sind die Gruppen $L_1 = \langle a,C \rangle$, $L_2 = \langle b,C \rangle$ und $L_3 = \langle ab,C \rangle$, wobei $C = \langle c_1, c_2,\ldots, c_{in} \rangle$ ist.
G ist GQ-Gruppe jeder dieser Gruppen.

Beweis:
Sei L eine abelsche Untergruppe vom Index 2 in G.Sei $C = \langle c_1, c_2,\ldots, c_{in} \rangle$
Dann ist $L \cap \langle a,b \rangle \neq \{e\}$, da sonst $G{:}L \geq 4$ ist. Ist $L \cap \langle a,b \rangle = \{a^2\}$, so ist $G{:}L \geq 4$.
Also ist $L \cap \{a,b,ab\} \neq \emptyset$-
Ist $a \in L$, so ist $L \leq \mathrm{Zentr}(a) = \langle a,C \rangle = L_1$. Dann ist $L = L_1$.
Ist $b \in L$, so ist $L \leq \mathrm{Zentr}(h) = \langle b,C \rangle = L_2$. Dann ist $L = L_2$.
Ist $ab \in$-L, so ist $L \leq \mathrm{Zentr}(ab) = \langle ab,C \rangle = L_3$. Dann ist $L = L_3$.
Man rechnet leicht nach, daß G GQ-Gruppe jeder der Gruppen L_1,L_2,L_3 ist.

6.18. LEMMA:

Sei G eine GDC-Gruppe. Seien L und U abelsche Untergruppen von G, so daß G GDC-Gruppe von L und von U ist. Dann sind L und U isomorph.
Beweis:
Ist G keine GQ-Gruppe, so ist nach Lemma 6.15. $U = L$.
Ist G eine GQ-Gruppe, so sind nach Lemma 6.17. U und L isomorph.

6.19. LEMMA:

Sei L eine abelsche Gruppe und. G Erweiterung von L durch die Gruppe Z_n. Sei $\{c,\beta]$ ein Parametersystem der Erweiterung. Ist G eine GDC-Gruppe, so ist:
a) $n = 2$, $o(c) = 1$ und $\beta = \mathrm{inv}$ oder
b) $n = 4$, $c = e$ und $\beta = \mathrm{inv}$ oder

c) $L = Z_4 \times Z_2^n$ (m-$\in$ $\mathbb{N}$), n = 2, $c^2 = e$ und

$G = \langle a,b \mid a^4 = b^4 = e,\ b^{-1}ab = ab^2\rangle \times Z_2^{n>-1} = GDC(4,2) \times Z_2^{n-1}$.

Beweis

Sei G eine GDC-Gruppe und U eine abelsche Untergruppe von G, so daß G eine GDC-Gruppe von U ist.

1) Ist n = 2, so ist G:L = 2.

a) Ist $U \neq Z_4 \times Z_2^m$, so ist nach Lemma 6.15. U = L. Dann ist o(c) = 2 und β = inv.

b) Ist $U \neq Z_4 x Z_2^m$ für ein m $\in$ $\mathbb{N}$, so ist i) $G = Q x Z_2^n$ oder ii) $G = GDC(4,2)xZ_2^{n-1}$ und n≥1.

i) Ist $G = Q \times Z_2^m = \langle a,b \mid a^4=e,\ a^2=b^2,\ b^{-1}ab = a^{-1}\rangle \times Z_2^m$, so ist L eine der Gruppen $\langle a,Z_2^m\rangle$, $\langle b,Z_2^m\rangle$, $\langle ab,Z_2^m\rangle$. In jedem Fall ist o(c) = 2 und β = inv.

ii) Ist $G = GDC(4,2) \times Z_2^{m-1}$, so folgt aus Lemma 6.14., daß Fall a) oder Fall c) der Behauptung zutrifft.

2) Ist n = 4, so ist G:L = 4. Sei d $\in$ G-L, so daß G = <L,d> ist. Sei b$\in$ G - U.

Ist L ∩ bU ≠ Ø, so sei o.B.d.A. b $\in$ L. Ist d $\in$ bU, so ist d = b £ L, was nicht möglich ist. Ist d $\in$ U, so ist $b^{-1}db = d^{-1}$. Daraus folgt dann, daß $d^{-1}bd = bd^2 \in L$ ist, da n normal in G ist. Dann ist aber $d^2 \in L$, was nicht möglich ist. Also ist L≤ U. Da <L,d> = G ist, ist d$\in$ bU. Also ist c = e und β = inv.

3) Sei n ≠ 2,4. Sei d € G - L, so daß G = <L,d> ist.

Sei b $\in$ G - U. Für alle x $\in$ bU ist nun o(x) = 4. Also ist d $\in$ U. Dann ist L ∩ bU ≠Ø. Sei o.B.d.A b $\in$ L. Aus $b^{-1}db = d^{-1}$ folgt nun $d^{-1}bd = bd^2$. Da L normal in G ist, ist dann d $\in$ L, was nicht möglich ist, da n ≠ 2 ist. Also ist n $\in$ {2,4}.

6.20. LEMMA:

Sei G eine Gruppe. Sei φ $\in$ Aut(G) - {1}. Sei c $\in$ G mit o(c) = 2 und φ(c) = c. Gilt dann für alle x $\in$ G: φ(x) $\in$ {x, xc}, so ist $\varphi^2 = 1$ und c $\in$ Z(G).

Beweis:

Sei U = {x$\in$ G I φ(x) = x] und V = (x$\in$G| φ(x) = xc}. Dann ist U eine nicht triviale Untergruppe von G. Sei u $\in$ U - {e} und v $\in$ V. Dann ist φ(vu) = vcu $\in${vu, vuc}. Also ist u = cuc und c $\in$ Zentr(U). Es ist $\varphi(v^{-1}) = cv^{-1} = v^{-1}c$. Also ist c $\in$ Zentr(V) und deshalb c $\in$ Z(G). Es ist $\varphi^2(v) = \varphi(vc) = vc^2 = v$. Also ist $\varphi^2 = 1$.

6.21. SATZ:

Sei G eine Gruppe.

1) Genau dann ist $a_0(G) > 1$, wenn

i) G eine abelsche Gruppe mit $\exp(G) > 2$ oder

ii) G eine GDC-Gruppe ist. [Wa 1, Theorem 3]

2) Ist G eine abelsche Gruppe,mit $\exp(G) > 2$, so ist $Aut_0(G) = \{1, inv\}$.

Ist G eine GDC-Gruppe der abelschen Gruppe L, aber keine GQ-Gruppe, so ist $Aut_0(G) = \{1, \alpha]$, wobei $\alpha|_L = 1|_L\ \alpha|_{G-L} = 1|_{G-L}$ ist.

Ist $G = Q \times L = <a,b\ |a^4 = e, b^2 = a^{2,}b^{-1}ab = a^{-.1}> \times L$ mit $\exp(L) = 2$ eine GQ-Gruppe, so ist $Aut_0(G) = \{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$, wobei $\alpha(a) = a$, $\alpha(b) = b^{-1}$ und $\alpha|_L = 1|_L$ und $\beta(a) = a^{-1}$, $\beta(b) = b$ und $\beta|_L = 1|_L$ ist.

Beweis:

1)

A) Sei $a_0(G) \geq 2$. Sei $\varphi \in Aut_0(G) - \{1\}$. Sei $U = \{x \in G \mid \varphi(x) = x\}$ und $V = [x \in G\ |\varphi(x) = x^{-1}\}$. Ist $V = G$, so ist $\varphi = inv$. Dann ist G eine abelsche Gruppe mit $\exp(G) > 2$. Sei also $V \neq G$. Sei $W = V - U$. Dann ist W nicht leer. Da $V \neq G$ ist, ist auch U nicht leer und $\exp(U) > 2$. Sei $x \in U$. und $y \in W$. Dann ist $\varphi(xy) = xy^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. Also ist $y^{-1}xy = x^{-1}$ für jedes $x \in U$ und jedes $y \in G\text{-}U$. Daraus folgt, daß U ein abelscher Normalteiler von G ist. Seien $y_1,y_2 \in W$. Dann ist $y_2^{-1}\ y_1^{-1}xy_1y_2 = x$ für jedes $x \in U$. Also ist $y_1y_2 \in U$. Dann ist $G{:}U = 2$.

Sei $b \in W = G - U$. Dann ist $b^2 \in U - \{e\}$. Nun ist $b^2 = b^{-2}$, wie oben gezeigt wurde. Also ist $o(b) = 4$. Dann ist: $G = <U,b\ l\ o(b) = 4, b^2 \in U, b^{-1}xb = x^{-1}$ für alle $x\in<U>$ eine GDC-Gruppe der abelschen Gruppe U.

B) Sei G eine abelsche Gruppe mit $\exp(G) >2$. Dann ist $inv_G \in Aut_0(G) - \{1\}$.

Sei $G = <L,b>$ eine GDC-Gruppe der abelschen Gruppe L. Sei $\Phi \in S(G)$ definiert durch $\Phi|_L = 1|_L$, $\Phi|_{bL} = inv|_{bL}$. Dann ist $\Phi \in Aut(G) – \{1\}$, wie man leicht nachprüft.

2) Sei G eine abelsche Gruppe mit $\exp(G) > 2$.

Nach 1B) des Beweises ist $\{1,inv] \leq Aut_0(G)$. Nach 1A) des Beweises ist dann $Aut_0(G) = \{1,inv\}$. Sei G eine GDC-Gruppe der abelschen Gruppe L, aber keine GQ-Gruppe. Nach Teil 1B) des Beweises ist $\{1,\alpha\} \leq Aut_e(G)$. Sei angenommen, daß $Aut_0(G) \neq \{1,\alpha\}$ ist. Sei $\beta \in Aut_0(G) - \{1\}$. Dann gibt es nach Teil 1A) des Beweises eine abelsche Untergruppe U von G, so daß G GDC-Gruppe von U ist, und gilt: $\beta|_U = 1|_U$, $\beta|_{G-U} = inv|_{G-U.}$ Da $\beta \neq \alpha$ ist, ist $U \neq L$.

Nach Lemma 6.15. ist dann aber G eine GQ-Gruppe. Also ist $Aut_0(G) = \{1,\alpha\}$.

Sei $G = Q \times L = <a,b \mid a^4 = e, b^2 = a^2, b^{-1}ab = a^{-1} > \times L$ mit $\exp(L) = 2$ eine GQ-

Gruppe. Dann ist G eine GDC-Gruppe der abelschen Gruppen $L_1=\langle L,a\rangle$, $L_2=\langle L,b\rangle$, $L_3= \langle L,ab\rangle$ und nur dieser Gruppen. Nach Teil 1A) des Beweises ist dann $Aut_0(G) = \{1, \varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}$, wobei gilt: $\varphi_i|_{L_i} = 1|_{L_i}$ und. $\varphi_i|_{G-L_i} = inv.|_{G-L_i}$.

6.22. LEMMA:

1) Sei L eine abelsche Gruppe mit $\exp(L) > 2$. Dann ist $c(L)\geq 2$ und $2|c(L)$.

2) Sei G eine GDC-Gruppe, aber keine GQ-Gruppe. Dann ist $c(G) \geq 2$ und $2|c(G)$.

3) Sei G eine GQ-Gruppe. Dann ist $c(G) \geq 4$ und $4|c(G)$.

Beweis:

Ist G eine Gruppe, so ist nach Bem. 2.11 $a_0(G)|c(G)$.

1) Es ist $a_0(L) = 2$ nach Satz 6.21.

2) Es ist $a_0(G) = 2$ nach Satz 6.21.

3) Es ist $a_0(G) = 4$ nach Satz 6.21.

6.23. Folgerung:

1) Sei L eine abelsche Gruppe mit $\exp(L) > 2$.
   Dann besitzt L keine GRR. [McA 1]. [Ch 1], [Sa 3,Theorem 3]

2) Sei G eine GDC-Gruppe. Dann besitzt G keine GRR.[No 1,Theorem 1],[Wa 1,Cor 3A]

7. Die Stabilitätsklassen

7.1. LEMMA:[Im-Wa 1, Lemma 3]

Sei $Y = X(G_1,H_1)$ und G eine Untergruppe von G_1. Sei $\{b_0, b_1,....,b_{m-1}\}$ ein Repräsentantensystem der Linksnebenklassen von G in G_1, wobei o.B.d.A. $b_0 = e$ sei.
Für i = 0,1,....,m-1 sei definiert $X_i = X|_{b_iG}$ und $K_i = H_1 \cap b_iG$,
Dann gilt:
1) Die Graphen X_i (i = 1,...,m-1) sind isomorph zum Graphen $\mathbf{X_0 = X(G,K_0)}$.
2) Bleibt G unter $A_e(Y)$ stabil, so bilden die Mengen b_iG (i = 0,1,...,m-1) ein vollständiges Blocksystem von A(Y).
Beweis:
1) Sei definiert: β_i: $b_iG \mapsto G$, $b_ix \mapsto x$ (i = 1,....,m-1). Dann sind die β_i Graphen-isomorphismen von X_1 auf X_0, da gilt: $[b_ix,b_iy] \in E(X_i) \Leftrightarrow x^{-1}y \in K_0 \Leftrightarrow [x,y] \in E(X_0)$
2) G bleibe unter $A_e(Y)$ stabil. Sei $\Phi \in A(Y)$ und $i \in \{0,...,m-1\}$. Dann ist $\Phi_{b_i} \in A_e(Y)$ und es gilt: $\Phi[b_iG] = \Phi(b_i)\ \Phi_{b_i}[G] = \Phi(b_i)\ G$.
7.2. LEMMA: [Im 5, Theorem 1]
Sei $X = X(G,H)$ und $Y = X(G_1,H_1)$, so daß $G < G_1$ und $H_1 \cap G = H$ ist.
Sei $n = \max(|H_1 \cap xG| \mid x \in G_1 - G)$ und $k = |H_1 - H|$.
Ist dann: i) $n < |H| + 1 - ½|G|$ und ii) $k < |H| +1 -1/3|G|$, so bleibt G unter $A_e(X)$ stabil.
Beweis:
Es gelte i) und ii). Sei angenommen, daß G unter $A_e(X)$ nicht stabil bleibt.
Sei $\Phi \in A_e(X)$, so daß $V= \Phi(G) \neq G$ ist.
a) Es gebe ein $x \in G_1$, so daß $V \subset G \cup xG$ ist. Sei $V_1 = V \cap G$ und $V_2 = V \cap xG$. Sei o.B.d.A. angenommen daß $|V_1| \leqslant |V_2|$ ist. Dann ist $|V_1| \leqslant ½\ |G|$.
Sei $a \in V_1$. Da der Graph $Z = X|_V$ isomorph zu X ist, ist
$|H| = \varrho(a,V) = \varrho(a,V_1) + \varrho(a,V_2) \leqslant |V_1| - 1 + |aH_1 \cap xG| \leqslant ½\ |G| - 1 + n$.
Das ist ein Widerspruch zur Bed. i)
b) Es gebe $x, y \in G_1 - G$ mit $x^{-1}y \in G$, so daß $V_2 = V \cap xG \neq \emptyset$ und $V_3 = V \cap yG \neq \emptyset$ ist.
Sei o.B.d.A. angenommen, daß $|V_1| \leqslant |V_2|, |V_3|$ ist. Dann ist $V_1 <1/3|G|$.
Sei $a \in V_1$. Da der Graph $Z = X|_V$ isomorph zu X ist, ist $|H| = \varrho(a,V)=\varrho(a,V_1)+\varrho(a, V- V_1)$ $\leqslant |V_1| - 1 + \varrho\ (a,G_1 -) \leqslant 1/3|G| - 1 + n$. Das ist ein Widerspruch zu Bed. ii). Also bleibt G unter $A_e(X)$ stabil.

7.3. Definition:

Sei $X = X(G,H)$ und seien $m,n \in \mathbb{N}$, wobei $m \geqslant 2$ ist.

1) Der Graph X gehöre zur Klasse $\mathbf{N_{m,n}}$, wenn für jede Gruppe $G_1 > G$ mit $G_1{:}G = m$ und jeden CG $Y=X(_{m,n})$ mit den Eigenschaften

i) $H \cap G = H$ und ii) $|H_1 \cap xG| \leqslant n$ für alle $x \in G_1 - G$ gilt, daß G unter $A_e(Y)$ stabil bleibt.

2) Der Graph X gehöre zur Klasse $\mathbf{Q_{m,n}}$ **bzw.** $\mathbf{R_{m,n}}$, wenn für jede Erweiterung $G_1=\langle G,b\rangle$ von G durch Z_m und jeden CG $Y = X(G_1,H_1)$ mit den Eigenschaften

i) $H_1 - (bG \cup b^{-1}G) = H$ und ii) $|bG - H_1| \leqslant n$ bzw. $|bG \cap H_1| \leqslant n$ gilt,

daß G unter $A_e(Y)$ stabil bleibt.

3) Die Klasse $S_{m,n}$ sei definiert durch $S_{m,n} = Q_{m,n} \cup R_{m,n}$

4) Die Gruppe G gehöre zur Klasse $N_{m,n}$ ($Q_{m,n}$, $R_{m,n}$, $S_{m,n}$), wenn sie eine MRR besitzt, die zu der entsprechenden Klasse gehört.

7.4. LEMMA:

Seien $m,n \in \mathbb{N}$ mit $m \geqslant 2$. Dann ist $N_{m,n} \subset R_{m,n}$ und $N_{2,n} = R_{2,n}$.

Beweis:

Sei $X = X(G,H) \in N_{m,n}$. Sei $G_1= \langle G,b\rangle$ Erweiterung von G durch Z_m und $Y = X(G_1,H_1)$, so daß $H_1 - (bG \cup b^{-1}G) = H$ und $|bG \cap H_1| \leqslant n$ ist.

Dann ist $G_1{:}G = m$, $H_1 \cap G = H$ und $|H_1 \cap xG| \leqslant n$ für alle $x \in G_1 - G$.

Da $X \in N_{m,n}$ ist, bleibt G unter $A_e(Y)$ stabil. Also ist $X \in R_{m,n}$.

7.5. LEMMA:

Sei $X = X(G,H)$ und $n \in \mathbb{N}$. Für m = 2, 3 gilt dann:

1) $X \in Q_{m,n} \Leftrightarrow X' \in R_{m,n}$

2) $\underline{S}_{m,n}= \underline{Q}_{m,n} = \underline{R}_{m,n}$

Beweis:

1) Sei $G_1= \langle G,b\rangle$ eine Erweiterung der Gruppe G durch die Gruppe Z_m.
Sei $Y = X(G_1,H_1)$, ein CG von G_1.

Dann ist $X' = X(G,H')$ und $Y' = X(G_1,H_1')$. Weiter ist:

i) $H_1 - (bG \cup b^{-1}G) = H \Leftrightarrow H_1' - (bG \cup b^{-1}G) = H'$.

ii) $bG - H_1 = bG \cap H_1'$, also insbesondere $|bG - H_1| \leqslant n \Leftrightarrow |bG \cap H_1'| \leqslant n$.

iii) $A_e(Y') = A_e(Y)$.

Nun ist X genau dann aus $Q_{m,n}$, wenn G für alle G_1 und alle H_1 mit $H_1 - (bG \cup b^{-1}G) = H$ und $|bG - H_1'| \leqslant n$ unter $A_e(Y)$ stabil bleibt. Letzteres ist nach i) - iii) genau dann der Fall, wenn G für alle G_1 und alle H_1' mit $H_1' - (bG \cup b^{-1}G) = H'$ und $|bG \cap H_1'| \leqslant n$ unter $A_Q(Y')$ stabil bleibt. Dies ist wiederum äquivalent dazu, daß X' aus $R_{m,n}$ ist.

2) Sei G eine Gruppe. G ist genau dann aus $Q_{m,n}$, wenn es eine MRR X von G aus $Q_{m,n}$ gibt. Letzteres ist nach Teil 1) des Beweises genau dann der Fall, wenn es eine MRR X' von G aus $R_{m,n}$ gibt. Dies wiederum ist äquivalent dazu, daß G aus $\underline{R}_{m,n}$ ist.

Also ist $\underline{Q}_{m,n} = R_{m,n} = \underline{Q}_{m,n} \cup \underline{R}_{m,n} = \underline{S}_{m,n}$.

7.6. Definition:

Sei $X = X(G,H)$, wobei H eine endliche Menge ist. Sei $£ = \{U \subset H \mid \langle U\rangle = G\}$.

Im Graphen X sei definiert: $\varrho_e(x) = \varrho(x,H)$ $(x \in H)$.

Sei $\alpha(H) = \max_{U \in £} \min \{ \varrho_e(x) \mid x \in U\}$, und sei $\beta(H) = 2|H| - \alpha(H)$.

7.7. LEMMA:

Sei $X = X(G,H)$.

1) Ist $|G| - \beta(H) > 2n$, so ist X in der Klasse $Q_{2,n}$.

2) Ist $(G) - \beta(H) > 3n$, so ist X in der Klasse $Q_{3,n}$.

3) Ist $|G| – ½ \beta(H) > 2n$, so ist X in der Klasse $Q_{m,n}$ ($m > 3$)

Beweis:

Sei $X = X(G_1,H_1)$, wobei $G_1 = \langle G,b\rangle$ eine Erweiterung der Gruppe G durch die Gruppe Z_m, $H_1 - (bG \cup b^{-1}G) = H$ und $|bG - H_1| \leqslant n$ ist. Wir betrachten den Graphen $Y_1 = Y|_{H1}$.

Sei dort definiert $\varrho_0(x) = |N(x) \cap G|$, $\varrho_1(x) =|N(x) \cap bG|$, $\varrho_{-1}(x) =|N(x) \cap b^{-1}G|$.

Sei $U \subset H$ so gewählt, daß $\langle U\rangle= G$ und $\alpha(H) = \min(\varrho_e(x) \mid x \in U)$ ist.

1) Sei $m = 2$ und $|G| - \beta(H) > 2n$. Da $b^{-1}G = bG$ ist, ist $\varrho(x) = \varrho_0(x) + \varrho_1(x)$ für alle $x \in H_1$

Ist $x \in U$, so ist: $\varrho(x) = \varrho_0(x) + \varrho_1(x) \geqslant \alpha(H) + | G| - 2n$.

Ist $y \in H_1 - H$, so ist $\varrho(y) = \varrho_0(y) +\varrho(y) \leqslant 2 |H|$.

Nun ist $\varrho(y) \leqslant 2|H| < 2|H] + |G| - \beta(H) - 2n = \alpha(H) + |G| - 2n \leqslant \varrho(x)$.

2) Sei $m = 3$ und $|G| - \beta(H) > n$. Für alle $x \in H_1$ ist $\varrho(x) = \varrho_0(x) + \varrho_1(x) + \varrho_{-1}(x)$.

Ist: $x \in U$, so ist: $\varrho(x)>= \alpha(H) + |G| - 2n + |G| - 2n = \alpha(H) + 2|G| - 4n$.

Ist $y \in H_1 - H$, so ist: $\varrho(y) \leqslant 2|H| + |G| - n$.

Also ist: $\varrho(y) \leqslant 2|H| + |G| - n < |G| - 3n + \alpha(H) + |G| - n < b = \alpha(H) + 2|G| - 4n$.

3) Sei $m \geq 4$ und $|G| - ½ \beta(H) > 2n$. Für alle $x \in H_1$ ist $\varrho(x) = \varrho_0(x) + \varrho_1(x) + \varrho_{-1}(x)$.

Ist $x \in U$, so ist $\varrho(x) \geq X(H) + 2 |G] - 4n$. Ist $y \in H_1 - H$, so ist $\varrho (y) \leq 2|H|$.

Also ist $\varrho(y) \leq 2|H| < 2|H| + 2|G| - \beta(H) - 4n < 2|G| + \alpha(H) - 4n < \varrho(x)$

Wegen der unterschiedlichen Eckengrade folgt nun, daß in jedem der Fälle 1), 2), 3) gilt: $\Phi[U] \subset H$ für alle $\Phi \in A_e(Y)$. Da $<U> = G$ ist, ist $\Phi[G] = G$ für alle $\Phi \in A_e(Y)$. Also bleibt G unter $A_e(Y)$ stabil.

7.8. LEMMA: [Im 5, Theorem 2-2]

Sei G eine Gruppe ungerader Ordnung und $X = X(G,H)$.

Dann ist $\max(\alpha(H), \alpha(H')) \geq 1/21*(o(G) - 16)$

Beweis: [Im 5, Beweis von Thecrem 2-2]

7.9. LEMMA:[Im 5, Cor 2]

Sei $X = X(G,H)$ ein endlicher Graph.

1) Ist $2|H| - IG] +2 > 2n$, so ist X in der Klasse $R_{2,n}$

2) Ist i) $2|H| - |G| + 2 > 2n$ und ii) $|H| - JiG| +1 > 2n$, so ist X in der Klasse $R_{3,n}$.

Beweis:

Sei $Y = X(G_1,H_1)$, wobei $G_1 = <G,b>$ eine Erweiterung der Gruppe G durch die Gruppe Z_m, H_1 - $(bG \cup b^{-1}g) = H$ und $|bG \cap H_1l = n$ ist.

Wir nehmen an, daß G unter $A_e(Y)$ nicht stabil bleibt. Sei $\varphi \in A_e(Y)$, so daß $K = \varphi(G) \neq G$ ist. Wir betrachten im Folgenden den Graphen $X_1 = Y|_K$. Sei $\varrho(x)$ der Eckengrad der Ecke $x \in V(X_1)$ im Graphen X_1. Da der Graph X_1 isomorph zum Graphen X ist, ist $\varrho(X_1) = |H|$. Sei $m = 2$ und $2|H| - |G| + 2 > 2n$.

Sei o.B.d.A. angenommen, daß $|K \cap G| \leq ½|GI$ ist. Sei $x \in K \cap G$.

Dann ist: $\varrho(x) = \varrho(x,K \cap G) + \varrho(x,K \cap bG) \leq ½ |GI - 1 + n < |H| + 1 - n + 1 - n = |H|$

Also ergibt sich ein Widerspruch und G bleibt unter $A_e(Y)$ stabil.

2) Sei $m = 2$ und sei i) $½|G| < IH] + 1 - n$ und ii) $1/3|G| < |H| + 1 - 2n$.

a) K schneide nur zwei der Mengen G, bG und $b^{-1}G$.

Sei o.B.d.A. $K \subset G \cap bG$ und $K \cap G| \leq 1/2|G|$. Sei $x \in K \cap G$.

Dann ist: $\varrho(x) = \varrho(x,K \cap G) + \varrho(x,K \cap bG) < ½ IG] -1 + n < |H|$.

b) K schneide alle drei Mengen b^iG. Sei o.B.d.A. angenommen, daß $|K \cap G| \leq 1/3|G|$ ist.

Sei $x \in K \cap G$. Dann ist:

$\varrho(x) = \varrho(x,K \cap G) + \varrho(x,K \cap bG) + \varrho(x,K \cap b^{-1}G) < 1/3|G|-1+2n < |H|+1-2n-1+2n = |H|$.

In beiden Fällen ergibt sich ein Widerspruch. Also bleibt G unter $A_e(Y)$ stabil.

7.10. Definition: [Im-Wa 1, p. 463]

Sei X ein isovalenter Graph. Sei $m \geq 2$ und $n \geq 1$. Sei $\Pi = \{V_1,V_2,....,V_p\}$ eine Partition von V(X) mit $2 \leq p \leq m$.

Π heiβt **P-Partition** von X, wenn für alle i, j∊{1,..,p} mit i ≠ j und alle x ∊ V gilt $\varrho(x,V)<n$.

Der Graph X gehöre zur Klasse $P_{m.n}$, wenn er eine $P_{m.n}$-Partition besitzt.

7.11. SATZ: [Ju 1]

Sei X ein endlicher isovalenter Graph. Sei $X \in P_{m,n}$ und $X' \in P_{k,l}$

Sei a(m,n,k,l) = (2m - 1)*n + (2k - 1)*l - 1.

Für $2 \leq p \leq m$ und $2 \leq q \leq k$ sei: b(p,q,n,l) = q/(q-1)*pn + p/(p-1)*ql

Dann ist: |V(X)| ≤ max (a(m,n,k,l), b(p,q,n,l) ($2 \leq p \leq m, 2 \leq q \leq l$)

Beweis:

Sei V = V(X).

Sei $\{V_{1,\dots},V_p\}$ eine $P_{m,n}$-Partition von X und $\{W_1,\dots,W_q\}$ eine $P_{k.l}$-Partition von X'.

a) Alle Mengen $V_i \cap W_j$. seien nicht leer.

Sei i ∊ {1,...,p] und j ∊ {1,...,q}. Sei $x \in V_i \cap W_j$. Sei $U_{ij} = V - (V_i \cap W_j)$. Dann ist:

$|U_{ij}| = \varrho(x,U_{ij}) + \varrho'(x,U_{ij}) \leq \sum_{s=1,s\neq i}^{p} \varrho(x, Vs) + \sum_{s=1,s\neq j}^{p} \varrho(x, Vs) \leq (p-1)*n+(q-1)*l$.

Andrerseits ist $|U_{ij}| = |V| - |V_i| - |W_j| + |V_i \cap W_j|$.

Also ist: $|V| - |V_i| - |W_j| + |V_i \cap W_j| \leq (p-1)n + (q-1)l$

Durch Summation dieser Ungleichungen über alle i und alle j ergibt sich nun:

$pq\,|V| - q\,(|V| - p\,|V| + |V| \leq pq\,((p-1)\,n + (q-1)l)$.

Also ist $(p - 1)(q - 1)\,|V| \leq pq\,((p-1)\,n + (q-1)l)$

Dann ist: |V(X)| < q/(q-1)*pn + p/(p-1)*ql = b(p,q,n,l)

b) Eine der Mengen $V_i \cap W_j$ sei leer. Sei o.B.d.A. $V_1 \cap W_1 = \emptyset$. Sei $x \in W_1$.

Dann ist: $|V_1| = \varrho(x,V_1) + \varrho'(x,V_1) \leq n + \sum_{i=2}^{q} \varrho'(x, Wi) \leq n + (q-1)l$

Sei $y \in V_1$. Dann ist: $|W_1| = \varrho(x,W_1) + \varrho'(x,W_1) \leq n + \sum_{i=2}^{q} \varrho(x, Vi) + l \leq l + (p-1)n$

Weiter ist: $\varrho = \varrho(X) = \varrho(Y) \leq |V_1| - 1 + (p - 1)n$ und $\varrho' = \varrho'(X) = \varrho'(X) \leq |W_1| - 1 + (q - 1)l$

Dann ist:

$|V(X)| = \varrho + \varrho' + 1$

$\leq |V_1| + |W_1| + (p - 1)n + (q - 1)l - 1$

$\leq n + (q-1)l + (p-1)n + 1 + (p-1)n + (q-1)l$

$\leq (2p - 1)n + (2q - 1)l - 1$

$\leq (2m - 1)n + (2k - 1)l - 1 = a(m,n,k,l)$

7.12. SATZ:

Sei X ein endlicher isovalenter Graph.

1) Ist $X \in P_{m.n}$ und $X' \in P_{k,l}$, so ist‘ $|V(X)| \leq 2(m\, n + k\, l)$ ([Im-Wa 1, Theorem 1])

2) Sind $X, X' \in P_{m.n}$, so ist:

i) $|V(X)| \leq 8n$ für $m = 2$

ii) $|V(X)| \leq 10n$ für $m = 3$

iii) $|V(X)l \leq 14n$ für $m = 4$

iv) $|V(X)j < 4mn$ für $m \geq 5$

Beweis:

Wir benutzen die Bezeichnungen von Satz 7.11.

1) Sei $X \in P_{m,n}$ und $X' \in P_{k,l}$. Es ist: $a(m,n,k,l) = (2m-1)n + (2k-1)l - 1 < 2(mn + kl)$

Und $b(p,q,n,l) = q/(q-1) * pn + p/(p-1)* ql \leq 2(pn + ql) \leq 2(mn + kl)$.

Also ist $|V(x)| \leq 2(mn + kl)$.

2) i) Sei $m = 2$. Dann ergibt sich die Aussage sofort aus 1).

ii) Sei $m = 3$. Es ist: $a(3,n,3,n) = (6 - 1)n + (6 - 1)n - 1 = 10\, n - 1$

und $b(p,q,n,n) = (1/(q-1) + 1/(p-1)) * pnq \leq 9n$, wie man durch Einsetzen der möglichen Werte von p und q leicht sieht.

iii) Es ist $a(4,n,4,n) = 14\, n - 1$ und $b(p,q,n,n) < 11n$, wie man durch Einsetzen der für p und q möglichen Werte sieht.

iv) Sei $m \geq 5$. Dann ist: $a(m,n,m,n) = 2(2m - 1)n - 1 < 4mn$ und

$$b(p,q,n,n) = pq*(1/(q-1) + 1/(p-1))*n \begin{cases} 8n \leq 4mn & p = q = 2 \\ < 2(p+q)n \leq 4mn & \text{sonst} \end{cases}$$

7.13. LEMMA:

Sei $n < \mathbb{N}$. Sei X ein isovalenter Graph mit $|V(X)| = 8n$.

Sei $[V_1,V_2]$ eine $P_{2,n}$-Partition von X und $\{W_1,W_2\}$ eine $P_{2,n}$-Partition von X'.

Dann ist $|V_i \cap W_j| = 2n$ für alle $i, j \in \{1,2\}$.

Seien $i,j \in \{1,2\}$ und $\{i,i‘\} = \{j,j’\} = \{1,2\}$. Dann gilt für jedes $x \in V_1 \cap W_j$:

$\varrho(x, V_1 \cap W_j) = 2n$

$\varrho(x, V_{i'} \cap W_j) = n$

$\varrho(x, V_{i'} \cap W_j) = 0$

Beweis:

Ist eine der Mengen $V_{i'} \cap W_j$ leer, so folgt aus dem Beweis von Satz 7.11., daß

$|V(X)| \leq a(2,n,2,n) = 6n - 1$ ist. Also ist keine der Mengen $V_{i'} \cap W_j$ leer.

Seien $i, j \in \{1,2\}$ und sei $x \in V_{i'} \cap W_j$.

Dann ist $|V_{i'} \cap W_{j'}| = \varrho(x,V_{i'} \cap W_{j'}) + \varrho'(x,V_{i'} \cap W_{j'}) \leq \varrho(x,V_{i'}) + \varrho'(x,W_{j'}) \leq 2n$ (*)

Also ist: $|V(X)| \leq 4*2n = 8n$

Da |v(X)| ± 8n ist., ist I1A W1\ = 2n für alle i, j G {l,2j

Aus (*) folgt dann, daß für jedes $x \in V_{i'} \cap W_j$ gilt:

$\varrho(x,V_{i'} \cap W_{j'}) = \varrho(x,V_{i'})=n$ und $\varrho'(x, V_{i'} \cap W_{j'}) = \varrho'(x,W_{j'}) =n$.

Also ist $\varrho(x,V_{i'} \cap W_j) =0$ und $\varrho(x,V_i \cap W_{j'}) = 2n$.

7.14. LEMMA:

Sei X ein Graph mit transitiver Automorphismengruppe.

Sei $n \leq 6$ und $|V(X)| = 8n$. Sei $u \in V(X)$.

Ist dann $|A_u(X)| < 6$ für $n = 1$ und $|A_u(X)| < 2n$ für $2 \leq n \leq 6$, so ist $X \notin P_{2,n}$ oder $X' \notin P_{2,n}$.

Beweis:

Sei angenommen, daß $X, X' \in P_{2,n}$ sind.

Sei $\{V_1, V_2\}$ eine $P_{2,n}$-Partition von X und $\{W_1,W_2\}$ eine $P_{2,n}$-Partition von X'.

Dann hat X die in Lemma 7.13. beschriebene Struktur.

Sei n = 1. Dann ist $|V_{i'} \cap W_j|= 2$ für alle $i,j \in \{1,2\}$. Man überlegt sich leicht, daß X dann der Kubus K_3 oder der Komplementärgraph des Kuben K_3 ist. Also ist dann $|A_u(X)| = 6$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. Sei $2 \leq n \leq 6$.

a) Die Mengen V_1 und W_1 seien Blöcke von A(X).
   Dann sind auch die Mengen $V_i \cap W_j$ $(i,j \in \{1,2\})$ Blöcke von A(X). Sei o.B.d.A. $u \in V_1 \cap W_1$. Sei $x \in V_1 \cap W_2$. Zu jedem $y \in \in V_{1'} \cap W_2$ gibt es nun ein $\varphi \in A(X)$, so daß $\varphi(x) = y$ ist. Jede der Mengen $V_i \cap W_j$ bleibt unter φ stabil. Sei ψ die Abbildung, die aus φ entsteht, wenn man φ auf der Eckenmenge $(V_1 \cap W_1) \cup (V_2 \cap W_2)$ durch die Identität ersetzt. Man überlegt sich leicht, daß dann $\psi \in A_u(X)$ ist. Da $|V_1 \cap W_2|= 2n$ ist, ist $|A_u(X)| \geq 2n$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

b) Die Menge V_1 sei kein Block von A(X). Sei $\Phi \in A(X)$, so daß $\Phi[V_1] \notin \{V_1, V_2\}$ ist. Sei $U_i = \Phi[V_i]$ für i=1,2. Für $i,j,k \in \{1,2\}$ sei $D_{ijk} = U_i \cap V_j \cap W_k$. Ist $i \in \{1,2\}$, so sei $i' \in \{1,2\}$, so daß $\{i,i'\} =\{1,2\}$ ist. Die Menge $U_i \cap V_j = D_{ij1} \cup D_{ij2}$ ist nicht leer. Sei o.B.d.A $D_{ij1} \neq \emptyset$ und $x \in D_{ij1}$. Es ist: $2n = \rho(x,V_i \cap W_2) = \rho(x,D_{ij2}) + \rho(x,D_{i'j2})$. Da $\rho(x,D_{i'j2}) \leq \rho(x,U_{i'}) \leq n$ ist, ist $|D_{ij2}| \geq \rho(x, D_{ij2}) \geq n$. $D_{ij2} \neq \emptyset$ ist, ergibt sich analog, daß $|D_{ij1}| \geq n$ ist. Da $|V(X)| = 8n$ ist, ist $|D_{ijk}| = n$. Sei $x \in D_{ijk}$. Dann ist $N(x) = D_{ijk'} \cup D_{i'jk'} \cup D_{i'j'k'}$. Der in natürlicher Weise definierte Graph, dessen Ecken die Mengen D, sind, ist der Kubus K_3. Für i,j,k $\in$ {1,2} sei $X_{ijk} = X|_{D_{ijk}}$. Dann sind die Graphen X_{ijk} isovalente Graphen≤k gleicher Valenz mit jeweils n Ecken. Da n ≤ 6 ist, ist $A(X_{ijk})$ transitiv auf V(X). Sei o.B.d.A. u $\in D_{111}$. Dann ist: $|A_u(X)| \geq |A_u(D_{111})| * \Pi|A(D_{ijk})| \geq 7n$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

c) Die Menge W_1 sei kein Block von A(X). Betrachtet man den Graphen X', so erhält man, wie im Fall b) daß $|A_u(X)|=|A_u(X')|$ ist, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

Da sich in jedem der Fälle a),b),c) ein Widerspruch ergibt, ist $X \notin P_{m,n}$ oder $X' \notin P_{m,n}$.

7.15. LEMMA:

Sei X = X(G,H),. und seien m,n$\in \mathbb{N}$, wobei m ≥ 2 sei. Besitzt X keine $P_{m,n}$-Partition, so ist X in der Klasse $N_{m,n}$.

Beweis:

Sei $X \notin P_{m,n}$. Sei $G_1 > G$, so daß G_1:G = m ist. Sei $Y = X(G_1,H_1)$, so daß $H_1 \cap G = H$ und $|H_1 \cap xG| \leq n$ ist für alle x$\in G_1$ - G. Sei $\{b_0,b_1,...,b_{m-1}\}$ ein Repräsentantensystem der Linksnebenklassen von G in G_1, wobei; o.B.d.A. b_0 = e sei. Seien i,j $\in$ {0,1,....,m-1}, so daß i ≠ j ist. Sei x $\in b_iG$. Dann ist im Graphen Y:

$\rho(x,b_jG) = | xH_1 \cap b_jG| = [H_1 \cap x^{-1}b_jG| \leq n$, da wegen i ≠ j $x^{-1}b_j \in G_1$ - G ist.

Also ist $\Pi = \{b_0G,b_1G,\ldots,b_{m-1}\}$ eine P_{mn}-Partition von Y.

Sei angenommen, daß G unter A(Y) nicht stabil bleibt. Sei $\Phi\in A_e(Y)$, so daß $V:= \Phi[G] \neq G$ ist. Sei $Z = Y|_V$.

Dann bilden die Mengen $V \cap b_iG$ (0≤i≤m-1) eine P_{mn}-Partition von Z.

Da X und Z isomorph sind, folgt daraus, daß X im Widerspruch zur Voraussetzung eine P_{mn}-Partition besitzt. Also bleibt G unter $A_e(Y)$ stabil. Daraus folgt nun, daß X $\in N_{mn}$ ist.

7.16. LEMMA:

Sei G eine Gruppe und n $\in \mathbb{N}$.

1) Ist o(G) >8n, so ist G $\in \underline{N}_{2,n}$

2) Ist o(G) ≥10n, so ist G $\in \underline{N}_{3,n}$

3) Ist o(G) ≥14n, so ist G $\in \underline{N}_{4,n}$

4) Ist o(G) ≥ 4mn, so ist G $\in \underline{N}_{m,n}$ (m≥5)

5) Ist o(G) ≥8 und c(G) < 6, so ist G $\in \underline{N}_{2,1}$

6) Ist o(G) ≥ 8n und c(G) < 2n,.so ist G $\in \underline{N}_{2,n}$ für 2≤n≤6.

Beweis:

Sei X = X(G,H) eine MRR von G. Dann ist auch X' eine MRR von G

Um zu zeigen, daß G $\in N_{m,n}$ ist, genügt es nach Lemma 7.15. zu zeigen, daß X $\notin P_{m,n}$ oder X'$\notin P_{m,n}$ ist.

Die Aussagen 1) - 4) der Behauptung folgen nun unmittelbar aus Satz 7.12. Die Aussagen 5) und 6) folgen aus Lemma 7.14. und der Aussage 1) der Behauptung.

7.17. SATZ:

Sei G eine Gruppe, und seien n,m $\in \mathbb{N}$, wobei m ≥ 4 sei.

1) Ist o(G)> 8n, so ist G $\in \underline{S}_{2,n} = \underline{Q}_{2,n} = \underline{R}_{2,n} = \underline{N}_{2,n}$

2) Ist o(G) ≥ 10n, so ist G $\in \underline{R}_{3,n} = \underline{S}_{3,n} = \underline{Q}_{3,n}$

3) Ist o(G) ≥ 4n, so ist G $\in \underline{Q}_{m,n}$

4) Ist o(G) ≥8 und c(G) < 6, so ist G$\in \underline{S}_{2,1}$.

5) Ist o(G) ≥ 8n und c(G) < 2n, so ist G $\in \underline{S}_{2,n}$ für 2 ≤ n ≤6

Beweis:

Die Aussagen 1), 2), 4) und 5) der Behauptung folgen unmittelbar aus Lemma 7.16.

Wir beweisen die Aussage 3). Sei o(G) ≥ 4n Sei X = X(G,H) eine MRR von G. Dann ist auch X' = X(G,H') eine MRR von G. Sei o.B.d.A. angenommen,

daß |H| ≤ |H'| ist. Dann ist 2|H| ≤ |H| + |H'| = o(G) -1. Also ist |H| ≤ ½ o(G) - 1.

Daraus folgt, daß gilt: o(G) - ½ β(H) ≥ ½ o(G) - |H| ≥ ½ o(G) + ½> 4n.

Aus Lemma 7.7. folgt nun, daß X $\in Q_{m,n}$ ist. Also ist G $\in \underline{Q}_{m,n}$.

8. Die Automorphismengruppe der erweiterten Graphen

8.1. SATZ:

Sei X = X(G,H). Sei G_1 Obergruppe von G und $\{b_0, b_0, b_1,...,b_{n-1}\}$ ein Repräsentantensystem der Linksnebenklassen von G in G_1, wobei o.B.d.A. b_0 = e sei.

Sei Y = X(G_1,H_1), so daß $H_1 \cap G = H$ ist, und G unter $A_e(Y)$ stabil bleibt.

Sei K = H_1- H und I ={0,1,...,m-1}. Für i,j$\in$ I und x$\in$ G sei definiert: $M_{ij}(x) = b_i^{-1} b_j x K \cap G$.

Sei $\Phi \in S(G_1)$.

Genau dann ist $\Phi \in A_e(Y)$, wenn es

i) eine Permutation α von I mit α(0) = 0,

ii) ein Tupel (a_i) mit $a_i \in G$ und a_0 = e und

iii) ein Tupel (Φ_i) mit $\Phi_i \in A_e(X)$ gibt, so daß

1) für alle i$\in$ I und alle x$\in$ G gilt: $\Phi(b_i x) = b_{\alpha(i)} a_i \Phi_i(x)$ und

2) für alle $i,j \in I$ mit $i > j$ und alle $x \in G$ gilt: $a_i\Phi_i[M_{ij}(x)] = M_{\alpha(i)\alpha(j)})(a_j\Phi_j(x))$

Beweis:

A) Sei $\Phi \in A_e(Y)$. Da G unter $A_e(Y)$ stabil bleibt, bilden die Mengen b_iG ($i \in I$) nach Lemma 7.1. ein vollständiges Blocksystem von $A_e(Y)$.

Sei $\alpha \in S(I)$ definiert durch $\alpha(i) = j$, wenn $\Phi(b_i) \in b_jG$ ist.

Für $i \in I$ sei $a_i = b_{\alpha(i)}^{-1}\Phi(b_i)$ und $\Phi_i = \Phi_{bi}|_G$.

Dann ist $a_i \in G$ für alle $i \in I$ und $a_0 = e$, und $\Phi_i \in A_e(X)$ für alle $i \in I$.

Ist $i \in I$ und $x \in G$, so ist $\Phi(b_i x) = \Phi(b_i)\ \Phi_{bi}(x) = b_{\alpha(i)}\ a_i\ \Phi_i(x)$. Also ist Bedingung 1) erfüllt.

Da H_1 und H unter $A_e(Y)$ stabil bleiben, bleibt auch K unter $A_e(Y)$ stabil.

Nach Lemma 3.10 ist dann für alle $x \in G$ und alle $j \in I$: $\Phi[b_jxK] = \Phi(b_jx)K$. Da für alle $i \in I$ gilt: $\Phi[b_jG] = b_{\alpha(i)}G$, gilt für alle $i,j \in I$ und alle $x \in G$: $\Phi[b_jxK \cap b_iG] = \Phi(b_jx)\ K \cap b_{\alpha(i)}G$.

Daraus folgt, daß gilt:

$$\Phi[b_iM_{ij}(x)] = b_{\alpha(j)}a_j\Phi_j(x)K \cap b_{\alpha(i)}G \quad \text{und} \quad b_{\alpha(j)}a_j\Phi_j(x)\ [M_{ij}(x)] = b_{\alpha(i)}M_{\alpha(i)\alpha(j)}(\ a_j\Phi_j(x))$$

Also ist Bedingung 2) erfüllt.

B) Es gebe eine Permutation α von I und Tupel (a_i) $(i \in I)$ und (Φ_i) $(i \in I)$, so daß die Bedingungen 1) und 2) der Behauptung erfüllt sind. Seien $u,v \in V(Y) = G_1$. Dann gibt es Elemente $x,y \in G$ und $i,j \in I$ mit $i \geq j$, so daß $\{u,v = \{b_ix,\ b_jy\}$ ist.

Es ist nun wegen Bed. 1: $\Phi([u,v]) = \Phi([b_jx,\ b_jy]) = [b_{\alpha(i)}a_i\Phi_i(x),\ b_{\alpha(j)}a_j\Phi_j(y)]$.

a) Ist $i = j$, so ist: $\{u,v \in E(Y) \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$ und $\Phi([u,v]) \in E(Y) \Leftrightarrow \Phi_i(y) \in^{-}\Phi_i(x)H$.

Da $\Phi_i \in A_e(X)=A(G,H)$ ist, ist $y \in xH \Leftrightarrow \Phi_i(y) \in^{-}\Phi_i(x)H$. Also ist $[u,v] \in E(Y) \Leftrightarrow \Phi[u,v] \in E(Y)$.

b) Sei $i > j$. Dann ist: $[u,v] \in E(Y) \Leftrightarrow b_ix \in b_jyK \Leftrightarrow M_{ij}(y)$

und $\Phi[u,v] \in E(Y) \Leftrightarrow$ …….. $\Leftrightarrow x \in M_{ij}(y)) \Leftrightarrow [u,v] \in E(Y)$. Also ist $\Phi \in Ae(Y)$.

8.2. SATZ:

Sei $X = X(G,H)$. Sei $G_1=\langle G,b\rangle$ Erweiterung von G durch die Gruppe Z_m, $m \geq 2$. Sei $\{c,\beta\}$ das zu b gehörende Parametersystem. Sei $I = \{i \mid 0 \leq i \leq m-1\}$. Sei $Y = X(G_1,H_1)$, so daß $H_1 \cap G = H$ ist, und G unter $A_e(Y)$ stabil bleibt. Sei $K = H_1 - H$ oder $K = G_1 - (H_1 \cup G)$.

Für $-(m-1) \leq i \leq m-1$ sei $M_i = b^{-1}K \cap G$. Sei $\Phi \in S(G\ )$. Genau dann ist $\Phi \in A_e(Y)$, wenn es

i) eine Permutation α von I mit $\alpha(0) = 0$.

ii) ein Tupel $(a_i\ )$ mit $a_i \in G$ und $a_0 = e$ und

iii) ein Tupel (Φ_i) mit $(\Phi_i \in A_e(X)$ gibt, so daß

1) für alle $i \in I$ und alle $x \in G$ gilt: $\Phi(b_ix) = b^{\alpha(i)}\ a_j\Phi_j(x)$ und

2) für alle $i,j \in I$ mit $i > j$ und alle $x \in G$ gilt: $a_j\Phi_j[\beta^k(x)M_k] = \beta^l(a_j)\ \beta^l\ \Phi_i(x)\ M_l$

wobei $k = i - j$ und $l = \alpha(i) - \alpha(j)$ ist.

Beweis:

Wir benutzen Satz 8.1. Die Menge $\{b^i \mid i \in I\}$ ist ein RS der Nebenklassen von G in G_1.

Damit erhält man:

$M_{ij}(x) := b^{-i}b^j xK \cap G = \beta^{i-j}(x)(\beta^{-(i-j)} K \cap G) = \beta^{i-j}(x) M_{i-j} = \beta^k(x) M_k$ und

$M_{\alpha(i)\alpha(j)} (a_j \Phi_i(x)) = \beta^{-1}(a_j\Phi_j(x)) (b^{-1}K \cap G) -= \beta^l (a_j\Phi_j(x)) M_l$.

Also ist die Bedingung 2) der Behauptung unter den gemachten Voraussetzungen äquivalent zur Bedingung 2) von Satz 8.1. Die Behauptung folgt nun aus Satz 8.1.

8.3. LEMMA:

Sei $X = X(G,H)$. Sei $G = <G,b>$ Erweiterung von G durch die Gruppe Z_2.

Sei $\{c,\beta\}$ das zu b gehörende Parametersystem. Sei $N \subset G$, so daß $e \in N$ ist.

Sei $M = N \cup c^{-1}\beta^{-1} [N^{-1}]$. Sei $K = bM$ und $K' = b(G - M)$.

Sei Y einer der Graphen $X(G_1,H \cup K)$, $X(G_1,H \cup K')$, $X(G_1,H' \cup K)$ und $X(G_1,H' \cup K')$.

G bleibe unter $A_e(Y)$ stabil. Sei $\Phi \in S(G_1)$.

Genau dann ist $\Phi \in A_e(Y)$, wenn es ein $a \in M$ und Elemente $\Phi_0,\Phi_1 \in A_e(X)$ gibt, so daß für alle $x \in G$ gilt:

1) $\Phi(x) = \Phi_0(x)$, $\Phi(bx) = ba\, \Phi_1(x)$ und 2) $a\, \Phi_1[(x)M] = \beta\Phi_0(x)M$.

Beweis:

Wir benutzen Satz 8.2. mit $m = 2$. Da $\alpha(0) = 0$ ist, ist $\alpha(1) = 1$. Es ist $M_1 = H$.

Es ist nun klar, daß die Bedingungen 1) und 2) äquivalent zu den Bedingungen 1) und 2) von Satz 8.2 sind. Damit ist alles gezeigt.

8.4. LEMMA:

Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $X = X(G,H)$, so daß $A_e(X) \simeq Aut(G,H)$ und $X \in R_{2,n}$ ist.

Sei $G = G,b)>$ Erweiterung von G durch die Gruppe Z_2 und $\{c,\beta\}$ das zu b gehörende Parametersystem. Sei $N \subset G$, so daß $e \in N$ ist, und $M = N \cup c^{-1}\beta^{-1}[N^{-1}]$. Sei $H_1 = H \cup bM$.

Ist $|M| \leq n$, so ist genau dann $c(G_1,H_1) = 1$, wenn es zu jedem Tripel (Φ,Ψ,a) mit $\Phi,\Psi \in A_e(X)$ und $a \in M$ außer dem Tripel $(1,1,e)$ ein $x \in G$ gibt, so daß $a\Phi\beta(x)\, \Phi[M] \neq \beta\Psi(x)\, M$ ist.

Beweis:

Sei $|M| \leq n$. Dann bleibt G unter $A_e(Y)$ stabil. Die Behauptung ergibt sich nun unmittelbar aus Lemma 8.3.

8.6. SATZ:

Sei $X = X(G,H)$ aus der Klasse $R_{2,1}$. Sei $G = <G,b>$ semidirektes Produkt von G mit Z_2, wobei $b^2 = e$ und β der von b auf G induzierte Automorphismus ist. Sei $Y=X(G_1,H \cup \{b\})$.

Dann ist $A_e(Y)$ $A_e(X) \cap \beta^{-1} A_e(X)$ β.

Beweis:

Nach Voraussetzung bleibt G unter $A_e(Y)$ stabil.

Ist $\Phi \in A_e(Y)$, so sei $\Phi_1=\Phi_b|_G$ und $\Phi_0=\Phi|_G$. Wir benutzen Lemma 8.3. mit $M = \{e\}$.

Da $a:= b^{-1}\Phi(b) = e$ ist, gilt nach Lemma 8.3.: $\Phi_1\beta(x) = \beta\, \Phi_0(x)$ für alle $x \in G$.

Sei $U = A_e(X) \cap \beta^{-1} A (X)\beta$. Es ist nun $\Phi_1 = \beta^{-1}\Phi_0\beta$ und $\Phi_0 = \beta^{-1}\Phi_1\beta \in U$.

Sei $\varepsilon : A_e(Y) \longmapsto U$, $\Phi \longmapsto \Phi_0$. Dann ist ε ein injektiver Homomorphismus. Man überlegt sich leicht, daß ε surjektiv ist. Also ist ε ein Isomorphismus. Damit ist alles gezeigt.

8.7. Folgerung:

Sei $X = X(G,H)$ aus der Klasse $R_{2,1}$. Sei $G_1 = G \times Z_2$, wobei $Z_2 = <b>$ ist.

Sei $Y = X(G_1,H \cup \{b\})$. Dann ist $A_e(Y) \simeq A_e(X)$ und deshalb $c(G_1,H_1) = c(G,H)$.

8.8. Folgerung:

Sei $X = X(G,H)$ aus der Klasse $R_{2,1}$ und $A_e(X) = \{1,\alpha\}$. Sei $G_1 = <G,b>$ semidirektes Produkt von G mit Z_2, wobei $b = e$ und β der von b auf G induzierte Automorphismus ist.

Sei $Y = X(G_1,H \cup \{b\})$. Ist dann $\alpha\beta \neq \beta\alpha$, so ist Y eine GRR von G_1.

Beweis:

Nach Satz 8.6. ist $A_e(Y) = A_e(X) \cap \beta^{-1}A_e(X)\beta$. Sei $\beta^{-1}\alpha\beta \neq \alpha$.

Dann ist $A_e(Y) = \{1\}$ und deshalb Y eine GRR von G.

8.9. LEMMA:

Sei $X = X(G,H)$. Sei $G = <G,b>$ Erweiterung der Gruppe G durch Z_m, $m \geq 3$.

Sei $\{c,\beta\}$ das zu b gehörende Parametersystem. Sei $M \subset G$, so daß $e \in M$ ist.

Sei $K = bM \cup M^{-1} b^{-1}$ und $K' = (bG \cup b^{-1}G) - K$. Sei $I = \{0,1,..,m-1\}$.

Sei Y einer der Graphen $X(G_1,H \cup K)$, $X(G_1,H \cup K')$, $X(G_1,H' \cup B)$, $X(G_1,H' \cup K')$.

G bleibe unter $A_e(Y)$ stabil. Sei $\Phi \in S(G_1)$.

Genau dann ist $\Phi \in A_e(Y)$, wenn es

i) zu jedem $i \in I$ ein $a_i \in G$ gibt, wobei $a_0 = e$ ist, und

ii) zu jedem $i \in I$ ein $\Phi_i \in A(X)$ gibt,

so daß für alle $i \in I$ und alle $x \in G$ gilt:

A i) $\Phi(b^i x) = b^{-i} a_i \Phi_i(x)$

ii) $a_{i+1}\Phi_{i+1}[\beta(x)M] = \beta(a_i)\beta\Phi_i(x) M$

iii) $a_{m-1} \Phi_{m-1} \beta^{-1}[c^{-1}xM^{-1}] = \beta^{-1} [c^{-1} \Phi_0(x)M^{-1}]$.

oder

B i) $\Phi(b^j x) = b^{-i} a_i \Phi_i(x)$

ii) $a_{i+1}\Phi_{i+1}[\beta(x)M] = \beta^{-1}[a_i\Phi_i(x)M^{-1}]$

iii)) $a_{m-1} \Phi_{m-1} \beta^{-1}[c^{-1}xM^{-1}] = \beta\Phi_0(x)M$

Beweis:

Wir benutzen Satz 8.2. Mit den Bezeichnungen von Satz 8.2 ist:

$M_1 = M$, $M_{-1} = cM_{m-1} = \beta^{-1}[M^{-1}]$ und $M_i = \emptyset$ für $2 \leq i \leq m$. Aus der Struktur des Graphen Y folgt nun, daß gilt: $\alpha = 1|_I$ oder $\alpha(i) = m-i$ für alle $i \in I$. Seien $i,j \in I$ und sei $k = i - j$.

Dann ist $l := \alpha(i) - \alpha(j) = k$, wenn $\alpha = 1|_I$ ist, und $l = -k$ wenn $\alpha \neq 1|_I$ ist.

Wir betrachten Bedingung 2) von Satz 8.2. Seien $i,j \in I$ mit $i > j$. Ist $2 \leq i - j \leq m-2$, so ist $M_K = M_l = \emptyset$. Also ist die Bedingung 2) in diesem Fall trivial.

Es bleiben also nur noch die Fälle $i = j+1$ und $i = m-1$, $j = ??$

a) Ist $\alpha=1$, so ist

Ai) äquivalent zu Bed.1) von Satz 8.2. und

Aii) äquivalent zu Bed. 2) für $i = j+1$.

Man rechnet leicht nach, daß Aiii) äquivalent zu Bed. 2) für $i = m-1$, $j = 0$ ist.

b) Ist $\alpha \neq 1$, so ist Ai) äquivalent zu Bed. 1) von Satz 8.2. und Aii) äquivalent zu Bed. 2) für $i = j+1$. Man rechnet leicht nach, daß Aiii) äquivalent zu Bed. 2) für $i = m-1$, $j = 0$ ist.

Damit ist gezeigt, daß die Bedingungen A) und B) gemeinsam äquivalent zu den Bedingungen 1) und 2) von Satz 8.2. sind. Die Behauptung folgt nun aus Satz 8.2.

8.10. LEMMA:

Sei $X = X(G,H)$, so daß $A_e(X) = Aut(G,H)$ ist. Sei $G_1 = \langle G,b \rangle$ Erweiterung von G durch Z_m, $m \geq 3$. Sei $\{c,\beta\}$ das zu b gehörende Parametersystem. Sei $M \subset G$, so daß $e \in M$ ist.

Sei $n = |M|$.

1) Zu jedem Tripel (Φ,Ψ,a) mit $\Phi,\Psi \in A_e(X)$ und $a \in M$, außer dem Tripel $(1,1,e)$, gebe es

ein $x \in G$, so daß gilt: $a\Phi\beta(x)\Phi[M] \neq \beta\ \Psi(x)\ M$

2) Zu jedem Tripel (Φ,Ψ,a) mit $\Phi,\Psi \in A_e(X)$ und $a \in \beta^{-1}[M^{-1}]$ gebe es ein $x \in G$, so daß gilt: $a\Phi\beta(x)\Phi[M] \neq \beta^{-1}\Psi(x)\ \beta^{-1}[M^{-1}]$.

Ist dann X aus der Klasse Sm,n, so ist $c(G_1) = 1$.

Beweis:

Sei $X \in S_{m,n}$. Sei $K = bM$.

Ist $X \in Q_{m,n}$, so sei $Y = X(G_1, H \cup (bG - K) \cup (b^{-1}G - K^{-1})$

Ist $X \in R_{m,n}$, so sei $Y = X(G_1, H \cup K \cup K^{-1})$

Dann ist G unter $A_e(Y)$ stabil. Wir beziehen uns auf Lemma 8.9.

Ist $\Phi \in A_e(Y)$ und $\Phi(b) \in K$, so sei $a = b^{-1}\Phi(b)$, $\Phi_1 = \Phi_b$ und $\Phi_0 = \Phi|_G$.

Aus Bed. Aii) von Lemma 8.9. folgt dann mit $i = 1$, daß gilt: $a\Phi_1\beta(x)\Phi_1[M] = \beta\Phi_0 M$ für alle $x \in G$. Also ist unter den gemachten Voraussetzungen $a = e$ und $\Phi_1 = \Phi_o = 1$. Dann ist aber $\Phi = 1$. Ist $\Phi \in A_e(Y)$ und $\Phi(b) \in K^{-1}$, so sei $a = b\Phi(b)$, $\Phi_1 = \Phi_b|_G$ und $\Phi_0 = \Phi|_G$.

Aus Bed. Bii) von Lemma 8.9. folgt dann mit $i = 1$, daß für alle $x \in G$ gilt:

$a\Phi_1\beta(x)\Phi_1[M] = \beta^{-1}\Phi_0(x)\ \beta^{-1}[M^{-1}]$. Das ist aber unter den gemachten Voraussetzungen nicht möglich. Also ist $A_e(Y) = \{1\}$.

8.11. SATZ:

Sei $X = X(G,H)$ aus der Klasse $S_{m,1}$, $m \geq 3$. Sei $G = <G,b>$ Erweiterung der Gruppe G durch Z_m. Sei $\{c,\beta\}$ das zu b gehörende Parametersystem.

Ist $X \in Q_{m,1}$, so sei $H_1 = (H \cup bG \cup b^{-1}G) - \{b,b^{-1}\}$. Ist $X \in R_{m,1}$, so sei $H_1 = H \cup \{b,b^{-1}\}$.

Sei $B_1 = A_e(X) \cap A_c(X)$ und $B_2 = (\Phi \in A_e(X) \mid \Phi(c) = c^{-1} \}$.

Ist $\bigcap_{0 \leq i \leq m-1} \beta^{-i}B_1\beta^i = \{1\}$ und $\bigcap_{0 \leq i \leq m-1} \beta^i B_2 \beta^i = \emptyset$, so ist $c(G_1,H_1) = 1$.

Beweis:

Die Menge G bleibt unter $A_e(Y)$ stabil. Also ist $\Phi(b) \in \{b,b^{-1}\}$ für alle $\Phi \in A_e(Y)$.

Aus Satz 3.16. folgt nun:

Ist $\Phi(b) = b$, so ist $\Phi(b^i) = b^i$ für alle $i \in Z$.

Ist $\Phi(b) = b^{-1}$, so ist $\Phi(b^i) = b^{-i}$ für alle $i \in Z$

Ist $\Phi \in A_e(Y)$, so sei $\Phi = \Phi_{b\wedge i}|_G$ $(0 \leq i \leq m-1)$.

Ist $\Phi(b) = b$, so ist $\Phi_i \in B_1$ für alle i.

Ist $\Phi(b) = b^{-1}$, so ist $\Phi_i \in B_2$ für alle i.

Wir benutzen Lemma 9.10. Es ist $M = \{e\}$ und $a_i = e$ für alle $i \in I$.

Sei $\Phi \in A_e(Y)$ und es gelte

a) Ist $\Phi(b) = b$, so folgt aus Aii), daß für alle $x \in G$: $\Phi_{i+1}\beta(x) = \beta^{-1}(x)$ ist.

Also ist $\Phi_{i+1}(x) = \beta^{-i}\Phi_i\beta^{-i}(x)$ für alle i. Dann ist $\Phi_i = \beta^{-i}\Phi_0\beta^{-i}$ und $\Phi_0 = \beta^i\Phi_i\beta^i$.

Also ist $\Phi_0 \in \bigcap_{0\leq i\leq m-1} \beta^i B_1 \beta^i$. Dann ist $\Phi_0 = 1$.

b) Ist $\Phi(b) = b^{-1}$, so folgt aus Bii), daß für alle $x \in G$: $\Phi_{i+1}\beta(x) = \beta^{-1}\Phi_i(x)$ ist.

Also ist $\Phi_{i+1} = \beta^{-1}\Phi_i\beta^{-1}(x)$ für alle i.

Dann ist $\Phi_i = \beta^{-1}\Phi_0\beta^{-1}$ und $\Phi_0 = \beta^i\Phi_i\beta^i \in \bigcap_{0\leq i\leq m-1} \beta^i B_2 \beta^i$.

Das ist aber nicht möglich, da die letzte Menge nach Voraussetzung leer ist. Damit ist alles gezeigt.

8.12. Bemerkung:

Ist $A_e(X)$ = Aut(G,H), so gilt auch die Umkehrung der Aussage von Satz 8.11. und es ist: $c(G_1,H_1) = n^*|\bigcap_{0\leq i\leq m-1} \beta^i B_1 \beta^i|$, wobei n=1 ist, falls $D:=\bigcap_{0\leq i\leq m-1} \beta^i B_1 \beta^i = \emptyset$ ist, und n = 2 ist, falls $D \neq \emptyset$ ist.

8.13. SATZ:

Sei X = X(G,H) aus der Klasse $S_{2,2}$ und $A_e(X) = \{1, \alpha\}$. Sei G_1 = <G, b> eine Erweiterung von G durch Z_2. Sei (c,β) das zu b gehörende Parametersystem.

Ist dann:

i) $c^2 \neq e$ oder $\beta^2 \neq 1$

ii) $\alpha(c) \neq c$ oder $\alpha\beta\alpha \neq \beta$

iii) $\alpha(c) \neq c^{-1}$ oder $\alpha\beta\alpha \neq \beta^{-1,}$

so ist der Graph $Y = X(G_1, H \cup \{b,b^{--1}\})$ eine GRR von G.

Beweis:

Wir benutzen das Lemma 8.4. Da $|A_e(X)|=2$ ist, ist $A_e(X)$=Aut(G,H) nach Folgerung 3.8. Sei N = {e}. Dann ist $M = \{e, c^{-1}\}$.

Es ist zu zeigen, daß es zu jedem Tripel $(\Phi,\Psi,a) \neq (1,1,e)$ mit $\Phi,\Psi \in \{1,\alpha\}$ und $a \in M$ ein $x \in G$ gibt, so daß gilt:

$$\beta\Psi(x^{-1})\, a\, \Phi\beta(x)\, \Phi[M] \neq M. \qquad (*)$$

Nach Satz 3.16. ist $\Phi(c) = \Psi(c) = c$, wenn a = e ist und $\Phi(c)=\Psi(c)= c^{-1}$, wenn $a = c^{-1}$ ist.

I) Sei a = e. Dann ist $\Phi(c) = \Psi(c) = c$.

a) $\Phi = 1, \Psi = \alpha$. Sei $\beta\alpha(x^{-1})\beta(x)\, M = M$ für alle $x \in G$.

Dann ist $\alpha(x)x^{-1}\{e,c^{-1}\}= \{e,c\}$. Dann ist $\alpha(x) \in \{x,cx\}$ für alle x G. Da $\alpha \neq 1$ ist, ist $c^2 = e$. Nach Lemma 6.20. ist dann $c \in Z(G)$, d.h. $\beta^2 = 1$. Das ist aber nicht möglich.

b) $\Phi = \alpha, \Psi = 1$. Sei $\beta\alpha(x^{-1})\beta(x)\, M = M$ für alle $x \in G$. Dann ist $\alpha(x)x^{-1}\{e,c^{-1}\}= \{e,c^{-1}\}$.

c) $\Phi = \Psi = \alpha$. Sei $\beta\alpha(x^{-1})\beta(x)\, M = M$ für alle $x \in G$.

Dann ist $x^{-1}\alpha\beta\alpha\beta^{-1}(x)\{e,c^{-1}\}= \{e,c^{-1}\}$.

Da $\alpha(c) = c$ ist, ist $\delta:=\alpha\beta\alpha\beta^{-1} \neq 1$. Also ist $\delta(x) \in \{x,xc\}$ und $c^2 = e$. Nach Lemma 6.20. ist dann $c \in Z(G)$, d.h. $\beta^2 = 1$. Das ist aber nicht möglich.

II) Sei $a = c^{-1}$. Dann ist $\Phi(c) = \Psi(c) = c^{-1}$.

a) $\Phi=\Psi=1$. Sei $\beta(x^{-1})c^{-1}\beta(x)M = M$ für alle $x \in G$. Dann ist $x^{-1}cx\{e,c^{-1}\}= \{e,c^{-1}\}$ und $c^2 = e$. Also ist $x^{-1}cx = c$ für alle $x \in G$. Dann ist $c \in Z(G)$, was nicht möglich ist.

b) $\Phi=1$. $\Psi= \alpha$. Sei $\beta\alpha(x^{-1})c^{-1}\beta(x)\, M = M$ für alle $x \in G$. Dann ist $\alpha(x^{-1})c^{-1}x\, \{e,c^{-1}\} = \{e,c^{-1}\}$ und es gilt: $c^2 = e$ und $\alpha(c) = c$. Es ist $\alpha(x) \in \{cx,cxc\}$ für alle x. Also ist $\beta^2\alpha(x) \in \{xc,x\}$ für alle $x \in G$. Da nun $\alpha\beta\alpha \neq \beta$ ist, ist $\beta^2\alpha \neq 1$. Nach Lemma 6.20. ist dann $c \in Z(G)$, was nicht möglich ist.

c) $\Phi = \alpha$, $\Psi = 1$. Sei $x^{-1}c^{-1}\alpha(x)\, \alpha[M] = M$ für alle $x \in G$. Dann ist $x^{-1}c\, \alpha(x)\, \{e,c\} = \{e,c\}$, da $c^2 = e$ und $\alpha(c)=c$ ist. Es ist $\alpha(x) \in \{cx, cxc\}$ für alle $x \in G$. Genau wie im Fall b) ergibt sich ein Widerspruch.

d) $\Phi = \Psi = \alpha$. Sei $\beta\alpha(x^{-1})c^{-1}\alpha\beta(x)\, \alpha[M] = M$ für alle $x \in G$. Dann ist $x^{-1}c^{-1}\alpha\beta\alpha\beta^{-1}(x)\, \{e,c\} = \{e,c^{-1}\}$ für alle $x \in G$,da $\alpha(c) = c^{-1}$ ist. Dann ist $\alpha\beta\alpha\beta^{-1}(x) = cxc^{-1}$ für alle $x \in G$. Dann ist $\alpha\beta\alpha\beta = 1$, was nicht möglich ist. Also gibt es zu jedem Tupel $(\Phi,\Psi, a) \neq (1,1,e)$ ein $x \in G$, so daß (*) erfüllt ist. Aus Lemma 8.4. folgt nun, daß $c(G_1) = 1$ ist.

8.14. SATZ:

Sei $n \geq 3$ eine ungerade Zahl. Sei $X = X(G,H)$ aus der Klasse $R_{n,1}$ und $A_e(X) = \{1,\alpha\}$.
Sei $G_1 = <G, b>$ eine Erweiterung der Gruppe G durch die Gruppe Z_m.
Sei $\{c, \beta\}$ das zu b gehörende Parametersystem.
Ist $X \in Q_{m,1}$, so sei $H_1 = (H \cup bG \cup b^{-1}G) - \{b,b^{-1}\}$. Ist $X \in R_{m,1}$, so sei $H_1 = H \cup \{b,b^{-1}\}$.
Ist dann:
i) $c^2 \neq e$ oder $\beta^2 \neq 1$ ii) $\alpha(c) \neq c$ oder $\alpha\beta\alpha \neq \beta$ iii) $\alpha(c) \neq c^{-1}$ oder $\alpha\beta\alpha \neq \beta^{-1}$
so ist $c(G_1,H_1) = c(G_1) = 1$.
Beweis:
Wir benutzen Satz 8.11. Sei $C_1= \bigcap_{0\leq i\leq m-1} \beta^{-i}B_1\beta^i$ und $C_2 = \bigcap_{0\leq i\leq m-1} \beta^iB_1\beta^i$.

1) Ist $c^2 \neq e$, so ist $C_2 \subset B \subset \{\alpha\}$.
   Ist $\beta^2 \neq 1$, so ist $C_2 \subset \{\alpha\}$, da aus $\beta^2 = \alpha$ folgt, $\beta^4 = 1$, was nicht möglich ist, da $ggT(n, o(\beta)) \neq 1$ ist. Also folgt aus i), daß $C_2 \subset \{\alpha\}$ ist.
2) Ist $\alpha(c) \neq c$, so ist $C_1=\{1\}$. Ist $\alpha\beta\alpha \neq \beta$, so ist $C_1=\{1\}$. Also folgt aus ii), daß $C = \{1\}$ ist.
3) Ist $\alpha(c)\neq c^{-1}$, so ist $C_2 \subset B_2 \subset \{1\}$. Ist $\alpha\beta\alpha = \beta^{-1}$, so ist $C_2\subset\{1\}$, da aus $\beta\alpha\beta=1$ folgt $\beta^4 = 1$, was nicht möglich ist, da $\beta\neq 1$ ist. Also folgt aus iii), daß $C_2 \subset \{1\}$ ist. Aus i) und iii) folgt nun, daß $C_2 = Q$ ist. Aus Satz 8.11. folgt nun, daß $c(G_1) = c(G_1,H_1) = 1$ ist.

9. Der Hauptsatz über Erweiterungen von Gruppen, die eine GRR besitzen.

9.1. LEMMA:

Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $X = X(G,H)$, so daß $c(G,H) = 1$ und $X \in R_{2,n}$ ist. Sei $G_1 = <G,b>$ Erweiterung von G durch die Gruppe Z_2 und {c,ß} das zu b gehörende Parametersystem.

Sei $N \subset G$, so daß $e \in N$ ist, und $M = N \cup c^{-1}ß^{-1} [N^{-1}]$. Sei $H_1 = H \cup bM$.

Ist $|M| \leq n$, so ist genau dann $c(G_1,H_1) = 1$, wenn es zu jedem $a \in M - \{e\}$ ein $x \in G$ gibt, so daß $x^{-1}ax\ M \neq M$ ist.

Beweis:

Sei $n \in \mathbb{N}$. Unter den gemachten Voraussetzungen ist $A_e(X) = 1$. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 8.4.

9.2. LEMMA:

Sei G eine Gruppe mit $c(G) = 1$ und $G \in \underline{S}_{2.1}$. Die nichtabelsche Gruppe G sei semidirektes Produkt von G mit Z_2. Dann ist $c(G)=1$.

Beweis:

Da $G \in \underline{S}_{2.1}$ ist, gibt es nach Lemma 7.5. eine GRR $X=X(G,H)$ von G aus der Klasse R2.

Sei b* G - G, so daß b = e ist. Sei $Y = X(G, H \{b)$. Nach Satz 8.6. ist dann $A_e(Y) = A_e(X) = \{1\}$. Also ist $c(G)=1$.

9.3. LEMMA:

Sei G eine Gruppe mit $c(G) = 1$ und $G \in S_{2,2}$. Die nichtabelsche Gruppe G_1 sei Erweiterung von G durch Z_2. Es gebe ein b G_1 - G, so daß $b^2 \notin Z(G)$ oder $b^4 \neq e$ ist. Dann ist $c(G) = 1$.

Beweis:

Da $G \in S_{2,2}$ ist, gibt es nach Lemma 7.5. eine GRR $X=X(G,H)$ von G aus der Klasse $R_{2,2}$. Sei $b \in G_1 - G$, so daß $b^2 \notin Z(G)$ oder $b^4 \neq e$ ist. Sei {c,ß} das zu b gehörende Parametersystem. Dann ist $c^2 \neq e$ oder $ß^2 \neq 1$. Sei $H_1 = H \cup \{b,b^{-1}\}$ und $Y = X(G_1,H_1)$.

Wir verwenden Lemma 9.1. Es ist $M = \{e,c^{-1}\}$. Es ist $M - \{e\} = \{c^{-1}\}$. Sei angenommen, daß für alle $x \in G$ gilt $x^{-1}c^{-1}xM = M$. Dann ist $\{x^{-1}c^{-1}x, x^{-1}c^{-1}xc^{-1}\} = \{e,c^{-1}\}$ für alle $x \in G$. Mit $x = e$ folgt insbesondere, daß $c^2 = e$ ist. Da $c \neq e$ ist, ist $x^{-1}cx = c$ für alle x G. Also ist $ß^2(x) = c^{-1}xc = x$ für alle $x \in G$. Daraus folgt, daß $ß^2 = 1$ ist.

Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Also gibt es ein $x\in G$, so daß $x^{-1}c^{-1}xM \neq M$ ist. Nach Lemma 9.1. ist dann $c(G_1,H_1)=1$.

9.4. LEMMA:

Sei G eine Gruppe mit $c(G) = 1$ und $G\in \underline{S}_{2.4}$. Die nichtabelsche Gruppe G_1 sei Erweiterung von G durch Z_2. Für alle $b \in G_1 - G$ sei $b^2 \in Z(G)$ und $o(b) = 4$.

Dann ist $c(G) = 1$.

Beweis:

Da $G\in\underline{S}_{2.4}$ ist, gibt es nach Lemma 7.5. eine GRR $X=X(G,H)$ von G aus der Klasse $R_{2,4}$.

Sei $b \in G_1 - G$ und $\{c,ß\}$ das zu b gehörende Parametersystem. Dann ist $c \in Z(G)$, $o(c) = 2$ und $ß^2 = 1$. Ist $ß = 1$, so ist G nichtabelsch.

Sei dann $a\in G\text{-}Z(G)$ und $b' = ba$. Der zu b' gehörende Automorphismus ß' ist dann $\neq 1$.

Also kann man o.B.d.A. annehmen, daß $ß\neq 1$ ist. Da $c(G) = 1$ ist, ist nach Bemerkung 2.11 $a_0(G) = 1$. Also gibt es ein $g\in G_1 - G$, so daß $ß(g) \in G - \{g,g^{-1}\}$ ist. Wir benutzen Lemma 9.1. Sei $N = \{e,g\}$. Dann ist $M = \{e,g,c,cß(g^{-1})\}$ und $H_1 = H \cup\{b,bg,b^{-1},(bg)^{-1}\}$.

Es gebe ein $a\in M – \{e\}$, so daß für alle $x\in G$ gilt $x^{-1}ax\, M = M$.

Dann ist insbesondere $aM = M$.

1) Ist $a= g$, so ist $\{g^2,g,c,cß(g^{-1})\} = \{e,c,cß(g^{-1})]=:T_1$.
   Da $g \neq c$, $g \neq e$ und $g \neq ß(g^{-1})$ ist, ist $gc \notin T_1$.
2) Ist $a = c$, so ist $\{cg, ß(g^{-1}) = \{g,cß(g^{-1})=:T_2$.
   Da $c \neq e$ und $g \neq ß(g^{-1})$ ist, ist $gc \notin T_2$.
3) Ist $a = cß(g^{-1})$, so ist $\{cß(g^{-1})g, ß(g^{-1}), ß(g^{-2})\} = \{e,g,c\} =: T_3$.
   Da $g \neq e$, $ß(g^{-1})\neq g$ und $g^{-1} \neq c$ ist, ist $ß(g^{-1}) \notin T_3$.

Also ist für alle $a \in M –\{e\}$: $aM \neq M$. Nach Lemma 9.1 ist dann $c(G_1,H_1) = 1$.

9.5. LEMMA:

Die Gruppe G_1 sei Erweiterung der Gruppe G = (12.3) = DH(6) durch die Gruppe Z_2.

Dann ist $c(G_1) = 1$.

Beweis:

Es ist $o(G_1) = 24$. G_1 ist keine GDC-Gruppe und nicht die Gruppe $(24.7) = QxZ_3$.

Aus Tabelle 3 entnimmt man nun, daß $c(G) = 1$ ist. Man rechnet übrigens leicht nach, daß G eine der Gruppen (24.5)=GDH(6,2), (24.10) = DH(12) und (24.13)= GDCH(6) ist.

9.5b. LEMMA

Die Gruppe G_1 sei Erweiterung der Gruppe G = (14.2) = DH(7) durch die Gruppe Z_2.

Dann ist $c(G_1) = 1$.

Beweis:

Es ist $o(G_1) = 28$. G_1 ist keine GDC-Gruppe. Nach Tabelle 3 ist dann G die Gruppe (28.3) = DH(14). Nach Lemma 14.6. ist dann $c(G) = 1$.

9.6. LEMMA:

Die Gruppe G_1 sei Erweiterung der Gruppe G = (16.6) = GDH(4,2) durch die Gruppe Z_2.

Dann ist $c(G_1) = 1$.

Beweis:

Nach Lemma 14.10. ist $c(G) = 1$ und $G \in \underline{S}_{2,2}$

I) Ist die Erweiterung semidirektes Produkt von G mit Z_2, so ist $c(G)=1$ nach Lemma 9.2.

II) Gibt es ein $b \in G_1$-G, so daß $b^2 \in Z(G)$ oder $b^4 \neq e$ ist, so ist $c(G) = 1$ nach Lemma 9.3.

III) Sei also $b^2 \in Z(G)$ und $o(b) = 4$ für alle $b \in G_1 - G$.

Es ist nun: $G = \langle a,s,d \mid a^4 = s^2 = d^3 = e,\ dad = a^{-1} \rangle$ und $Z(G) = \{e,s,a^2s,a^2\} \simeq Z_2^2$.

Die Orbits von Aut(G) sind: $O_1 = d\langle a,s \rangle$, $O_2 = \{a,a^{-1},as,a^{-1}s\}$, $O_3 = \{s,a^2s\}$, $O_4 = \{a^2\}$.

Sei $b \in G_1$ - G und {c,ß} das zu b gehörende Parametersystem.

Sei $\delta: G \longmapsto G$, $x \longmapsto ß(x)x$ und $D = \langle c, \delta[G] \rangle$.

Nach Lemma 6.11. ist dann $D = Z(G)$ und Z(G) bleibt unter ß fest.

Da $\delta(d) \in Z(G)$ ist, ist $ß(d) \in \{d,ds,da^2s,da^2\}$. Da $\delta(a) \in Z(G)$ ist, ist $ß(a) \in \{a,as,a^{-1}s,a^{-1}\}$.

Durch Wahl eines geeigneten $b_1 \in \{b,bd,ba,bda\}$ kann man erreichen, daß für den zu b gehörenden Automorphismus $ß_1$ gilt: $ß_1(d) \in \{d,ds\}$ und $ß_1(a) \in \{a,as\}$. Da Z(G) auch unter $ß_1$ fest bleibt, ist $ß_1(s) = s$.

Sei $\delta_1: G \longmapsto G$, $x \longmapsto ß_1(x)x$.

1) Ist $ß_1 = 1$, so ist $\delta_1[G] = \{e,a^2\}$. Dann ist $b^2 \in \{s,a^2s\}$.
   Man kann o.B.d.A. annehmen, daß $b^2 = s$ ist. Dann ist:
   $G_1 = \langle a,d,b \mid a^4 = d^4 = s^2 = e,\ dad = a^{-1} \rangle = DH(4) \times Z_4 = (32.14)$
   und $c(G_1) = 1$ nach Lemma 14.21.

2) Ist $ß_1(d) = d$ und $ß_1(a) = as$, so ist $\delta_1[G] = \{e,s,a^2s\}$. Also ist $b^2 = a^2$. Dann ist:
   $G = \langle a,d,s,b \mid a^4 = d^2 = s^2 = e,\ dad = a^{-1},\ b^2 = a^2, b^{-1}ab=a \rangle = (32.38)$, wie man leicht überprüft. Nach Lemma 14.32. ist dann $c(G_1) = 1$.

3) Ist $ß_1(d) = ds$ und $ß_1(a) = a$, so ist $\delta_1[G] = \{e,s,a^2\}$. Also ist $b^2 = a^2s$. Dann ist:
   $G = \langle a,d,s,b \mid a^4 = d^2 = s^2 = e, b^2 = a^2s, dad=a^{-1},\ b^{-1}db = ds \rangle$
   $= \langle a,f,d \mid a^4 = f^4 = d^2 = e,\ dad = a^{-1},\ dfd = f^{-1}a^2 \rangle = (32.39)$ (mit f = ba)

Nach Lemma 14.31. ist dann $c(G\ ) = 1$.

4) Ist $ß_1(d) = ds$ und $ß_1(a) = as$, so ist $\delta_1[G] = \{e,s,a^2s\}$. Also ist $b^2 = a^2$. Dann ist:

$G=<a,d,s,b \mid a^4 =d^2 =s^2 =e,b^2 =a^2,dad=a^{-1},b^{-1}ab=as, b^{-1}db=ds> = (32.46)$.

Nach Lemma 14.36. ist dann $c(G_1) = 1$.

9.7. LEMMA:

Die Gruppe G sei Erweiterung der Gruppe G=(16.9) durch die Gruppe Z_2. Dann ist c(G) =1.

Beweis:

Nach Lemma 14.12. ist $c(G) = 1$ und $G \in \underline{S}_{2,2}$.

I) Ist die Erweiterung semidirektes Produkt von G mit Z_2, so ist $c(G)=1$ nach Lemma 9.2.

II) Gibt es ein $b\in G_1 - G$, so daß $b \notin Z(G)$ oder $b^4 \neq e$ ist, so ist $c(G\ )=1$ nach Lemma 9.3.

III) Sei also $b^2 \in Z(G)$ und $o(b) = 4$ für alle $b\in G_1 – G$.

Es ist nun $G = <a,d| a^4 = d^4 = e, d^{-1}ad = a^{-1}d^2>$ und $Z(G) = \{e,a^2,d^2,a^2d^2\}$.

Die Orbits von Aut(G) sind:

$O_1 = \{a,a^{-1},d,d^{-1},ad^2,a^{-1}d^2,a^2d,a^2d^{-1}\}$, $O_2=\{ad,ad^{-1},a^{-1}d,a^{-1}d^{-1}\}$, $O_3=\{a^2,d^2\ \}$; $O_4=\{\ a^2d^2\ \}$.

Sei $b \in G_1$-G und {c,ß} das zu b gehörende Parametersystem.

Sei $\delta:G \mapsto G$, $x \mapsto ß(x)x$ und $D = <c\delta[G]>$. Nach Lemma 6.11. ist dann $D = Z(G)$ und $\delta[G]\subset Z(G)$. Da $\delta(d)\in Z(G)$ ist, ist $ß(d)\in \{d,d^{-1},da^2,d^{-1}a^2\ \}$. Da $\delta(a)\in Z(G)$ ist, ist $ß(a) \in \{a,a^{-1},ad^2,a^{-1}d^2\}$. Durch Wahl eines geeigneten $b \in \{b,bd,ba,bad\}$ kann man erreichen, daß für den zu b gehörenden Automorphismus ß gilt: $ß(d) \in \{d,d^{-1}\}$ und $ß(a) \in \{a,a^{-1}\}$.

Da a und d im gleichen Orbit von G liegen, braucht man nur drei Fälle zu unterscheiden.

Sei $\delta_1:G \mapsto G$, $x \mapsto ß_1(x)x$.

1) Ist ß = 1, so ist $\delta_1[G] = \{e,a^2,d^2\}$. Also ist $b_1{}^2 = a^2d^2$. Dann-ist:

$G_1 = <a,d,b \mid a^4 = d^4 = e,\ b^2 = a^2d^2,\ d^{-1}ad = a^{-1}d^2>$

$= <b,f,d \mid b^4 = f^2 = e,\ dfd = fb^2 >$(mit f = ad).= (32.16)

Nach Lemma 14.23. ist dann $c(G_1) = 1$.

2) Ist $ß_1(d) = d$ und $ß_1(a) = a^{-1}$, so ist $\delta_1[G] = \{e,a^2,d^2\}$. Also ist dann $b_1{}^2 = a^2d^2$. Dann ist:

$G_1 = <a,d,b \mid a^4 = d^4 = e,\ b^2 = a^2d^2,d^{-1}ad=a^{-1}d^2,b^{-1}ab=a^{-1}>$

$= <d,b,a \mid d^4 = b^4 = e,\ a^2 = d^2b^2,a^{-1}da=d^{-1}a^2,\ a^{-1}ba=ba^2>$

$= <d,b,f \mid d^4 = b^4 = f^2 = e,\ fdf = ab^2,\ fbf = b^{-1}d^2\ )>$ (mit f = ad)= (32.41)

Nach Lemma 14.34. ist $c(G\ ) = 1$.

3) Ist $ß_1(d) = d^{-1}$ und $ß_1(a) = a^{-1}$, so ist $\delta_1[G] = \{\ e,a^2\ d^2\ \}$.

Man kann nun o.B.d.A. annehmen, daß $b_1 = a^2$ ist. Dann ist:

$G = \langle a,d,b \mid a^4 = d^4 = e, b^2 = a^2, d^{-1}ad = a^{-1}d^2, b^{-1}ab = a^{-1}, b^{-1}db = d^{-1}\rangle$

$= \langle d,b,a \mid d^4 = b^4 = e, a^2 = b^2, a^{-1}da = d^{-1}a^2, a^{-1}ba = ba^2, b^{-1}db = d^{-1}\rangle$

$= \langle f,g,c,a \mid f^4 = g^2 = c^2 = e, a^2 = f^2, a^{-1}fa = f^{-1}, a^{-1}ga = gc\rangle$ (mit $f = ab$, $g = ad$ und $c = a^2d^2$)

$= (32.37)$

Nach 14.30. ist $c(G) = 1$.

9.8. SATZ:([Im-Wa 1, Theorem 2])

Sei G eine Gruppe mit $c(G) = 1$. Die nichtabelsche Gruppe G_1 sei Erweiterung der Gruppe G durch die Gruppe Z_2. Dann ist $c(G_1) = 1$.

Beweis:

1) Sei $o(G) < 16$. Dann ist G eine der Gruppen (12.3)=DH(6) oder (14.2)=DH(7) (siehe Tabelle 3).
   Ist G=DH(6), so ist $c(G) = 1$ nach Lemma 9.5.
   Ist G=DH(7), so ist $c(G) = 1$ nach Lemma 9.5b.
2) Sei $16 \leq o(G) < 32$. Nach Satz 7.17. ist dann G in Klasse $S_{2,2}$.
   Ist G_1 semidirektes Produkt von G mit Z_2, so ist $c(G)=1$ nach Lemma 9.2.
   Gibt es ein $b \in G_1 - G$, so daß $b^4 \neq e$ oder $b \notin Z(G)$ ist, so ist $c(G)=1$ nach Lemma 9.3.
   Für alle $b \in G_1 - G$ sei also $b^2 \in Z(G)$ und $o(b) = 4$.
   Nach Lemma 6.11. ist dann Z_2^2 Untergruppe von $Z(G)$ und $o(G) = 4n$, wobei $n \geq 4$ keine Primzahl ist. Also ist dann $o(G) \in \{16,24\}$.
   Ist $o(G) = 16$, so ist G eine der Gruppen (16.6) = GDH(4,2) oder (16.9), da dies die einzigen Gruppen mit $o(G) = 16$, $c(G) = 1$ und $Z_2^2 \leq Z(G)$ sind (siehe Tabelle 3).
   Ist G = (16.6), so ist $c(G) = 1$ nach Lemma 9.6.
   Ist G = (16.9), so ist $c(G) = 1$ nach Lemma 9.7.
   Ist $o(G) = 24$, so ist $G \in \underline{S}_{2,4}$ nach Tabelle 3. Dann ist $c(G) = 1$ nach Lemma 9.4.
3) Sei $o(G) \geq 32$. Nach Satz 7.17. ist dann $G \in \underline{S}_{2,4}$.
   Dann ist $c(G) = 1$ nach Lemma 9.2. oder Lemma 9.3. oder Lemma 9.4.

9.9. SATZ:([Im-Wa 1,Theorem 3])

Sei G eine Gruppe mit $c(G) = 1$. Sei $n \geq 3$ eine ungerade Zahl. Die nichtabelsche Gruppe G_1 sei Erweiterung der Gruppe G durch die Gruppe Z_n.

Dann besitzt G_1 eine GRR.

Beweis:

Da $c(G) = 1$ ist, ist $|G| \geq 12$.

Dann ist G sowohl in der Klasse $R_{3,1}$ als auch in der Klasse $Q_{n,1}$ für $n \geq 5$.

Ist $n = 3$, so sei $X = X(G,H)$ eine GRR von G aus der Klasse $R_{3,1}$.

Ist $n \geq 5$, so sei $X = X(G,H)$ eine GRR von G aus der Klasse $Q_{n,1}$.

Nach Lemma 6.10. gibt es ein $b \in G_1 - G$ mit $<G\ b> = G_1$,

so daß für das zu b gehörende Parametersystem {c,ß} gilt: $c^2 \neq e$ oder $ß^2 \neq 1$.

Ist $n = 3$, so sei $K = \{b, b^{-1}\}$. Ist $n \geq 5$, so sei $K = (bG \cup b^{-1}G) - (b, b^{-1}\}$.

Sei $Y = X(G_1,H \cup K$. Dann bleibt G unter $A_e(Y)$ fest.

Sei $\Phi \in A_e(Y)$, so daß $\Phi(b) = b^{-1}$ ist. Dann ist nach Satz.3.16. auch $\Phi(c) = c^{-1}$.

Da aber $c \in G$ ist, und deshalb unter Φ fest bleibt, ist $c^2 = e$.

Sei $x \in G$. Dann geht die Kante $[x,bß(x)]$ unter Φ über in die Kante $[x, b^{-1}ß(x)]$.

Die einzige Ecke aus $b^{-1}G$, die mit der Ecke x verbunden ist, ist die Ecke $b^{-1}ß^{-1}(x)$.

Also ist dann $ß(x) = ß^{-1}(x)$. Da dies für alle $x \in G$ gilt, ist $ß^2 = 1$. Das ist aber ein Widerspruch zur oben getroffenen Wahl von b. Also bleibt b unter $A_e(Y)$ fest.

Da $<G, b> = G_1$ ist, ist Y eine GRR von G_1.

9.10. SATZ:([No-Wa 1, Theorem 1]), ([Im-Wa 1, Cor 2A])

Sei G eine Gruppe mit $c(G) = 1$. Sei $n \geq 4$. Die nichtabelsche Gruppe G_1 sei Erweiterung von G durch Z_n. Dann besitzt G_1 eine GRR.

Beweis:

Da $c(G) = 1$ ist, ist $|G| \geq 12$. Nach Lemma 7.17. ist dann G in der Klasse $Q_{n,3}$.

Sei $X=X(G,H)$ eine GRR von G aus der Klasse $Q_{n,3}$. Sei $b \in G_1 - G$, so daß $G = <G,b>$ ist.

Sei ß der von b auf G induzierte Automorphismus.

Ist $ß = 1$, so ist G nichtabelsch. Sei dann $u \in G - Z(G)$ und $b' = bu$.

Dann ist der von b' induzierte Automorphismus $ß' \neq 1$.

Man kann also o.B.d.A. annehmen, daß $ß \neq 1$ ist.

Da $c(G) = 1$ ist, gibt es ein $g \in G$, so daß $ß(g) \in G - \{g, g^{-1}\}$ ist.

Da $|Gl \geq 12$ ist, gibt es ein $h \in G$ mit $h \in G - \{e,g,g^{-1},ß(g),ß(g^{-1}),ß^{-1}(g),ß(g)g\}$.

Sei $K = \{b, bg, bh\}$. Dann ist $K^{-1} = \{b^{-1}, b^{-1}ß^{-1}(g^{-1}), b^{-1}ß^{-1}(h)\}$

Sei $H_1 = (H \cup bG \cup b^{-1}G) - (K \cup K^{-1})$ und $Y = X(G,H_1)$.

Dann bleibt G unter $A_e(Y)$ fest. Sei $\Phi \in A_e(Y)$.

1) Ist $\Phi(b) = bg$, so ist $\{e,h\} = \{g^2, gh\}$.

2) Ist $\Phi(b) = bh$; so ist $\{e,g\} = \{hg, h^2\}$.

3) Ist $\Phi(b) = b^{-1}$, so ist $\{ß^{-1}(g^{-1}), ß^{-1}(h^{-1})\} = \{g, h\}$.

4) Ist $\Phi(b) = (bg)^{-1}$, so ist $\{e, ß^{-1}(h^{-1})\} = \{ß^{-1}(g^{-1})g, ß^{-1}(g^{-1})h\}$.

5) Ist $\Phi(b) = (bh)^{-1}$, so ist $\{e, ß^{-1}(g^{-1})\} = \{ß^{-1}(h^{-1})g, ß^{-1}(h^{-1})h\}$.

In jedem der Fälle ergibt sich ein Widerspruch zur Wahl von g und h.

Also ist $\Phi(b) = b$ für alle $\Phi \in A_e(Y)$. Da $\langle G,b \rangle = G_1$ ist, ist Y eine GRR von G_1.

9.11. SATZ:

Sei G eine Gruppe mit $c(G) = 1$. Die nichtabelsche Gruppe G_1 sei Erweiterung von G durch die Gruppe Z_n, wobei $n \geq 2$ ist. Dann ist $c(G) = 1$.

Beweis

1) Ist $n = 2$, so ist $c(G\ ) = 1$ nach Satz 9.8.

2) Ist $n = 3$, so ist $c(Gi) = 1$ nach Satz 9.9.

3) Ist $n \geq 4$, so ist $c(G\ ) = 1$ nach Satz 9.10.

Damit ist alles gezeigt.

III. DER CAYLEY INDEX DER ABELSCHEN UND DER GDC-GRUPPEN

Nach Folgerung 6.25. besitzen die abelschen Gruppen L mit $\exp(L) > 2$ und die GDC-Gruppen G keine GRR's.
Wir geben zunächst zwei Lemmas an, in denen hinreichende Bedingungen dafür angegeben werden, daß ein CG X eine ARR einer abelschen oder einer GDC-Gruppe ist.

10.1. LEMMA: ([Im 4, Prop. 1.8])
Sei G eine abelsche Gruppe mit $\exp(G) > 2$ oder eine GDC-Gruppe, aber keine GQ-Gruppe. Sei $X = X(G,H)$, Sei $K \subset G$, so daß gilt:

i) $K = K^{-1}$

ii) K bleibt stabil unter $A_e(X)$

iii) $A_e(X)|_K = Aut_0(G)|_K$

Ist dann $\langle K \rangle = G$, so ist X eine ARR von G.

Beweis:

Nach Satz 6.21. ist $a_0(G) = 2$. Sei $Aut_0(G) = \{1,\alpha\}$. Sei $\langle K \rangle = G$. Wir benutzen Satz 3.14.

1). Ist G eine abelsche Gruppe, so ist $K_3 = \langle K_1 \rangle \langle K_2 \rangle = \langle K \rangle = G$.

2), Ist G eine GDC-Gruppe der abelschen Gruppe L, so ist $K_2 \subset L$ und $K_1 \subset G - L$.

Ist $x \in L$ und $y \in G - L$, so ist $y^{-1}xy = x^{--1}$. Also ist: $K_3 = \langle K_1 \rangle \langle K_2 \rangle = \langle K \rangle = G$.

Aus Satz 3.14. folgt nun in beiden Fällen, daß $A_e(X) = Aut_0(G)$ ist.

10.2. LEMMA: ([Im-Wa 2,Prop. 2.11])
Sei G eine abelsche Gruppe mit $\exp(G) > 2$ oder eine GDC-$_e$, aber keine GQ-Gruppe. Sei $X= X(G,H)$. Seien $K,M \subset G$, so daß gilt:

i) $K = K^{-1}$

ii) K bleibt stabil unter $A_e(X)$

iii) $A_e(X)|_K = Aut_0(G)|_K$

iv) $\Phi \in A_e(X) \wedge \Phi|K = 1|_K \Rightarrow \Phi|_M = 1|_M$

Ist dann $\langle M \rangle = G$, so ist X eine ARR von G.

Beweis:

Nach Satz 6.21. ist $a_0(G) = 2$. Sei $Aut_0(G) = \{1,\alpha\}$. Sei $<M> = G$. Sei $\Phi \in A_e(X)$.

1) Ist $\Phi|_K = \alpha|_K$, so ist $\alpha\Phi|_K = 1|_K$. Also ist dann $\Phi(x) = (x)$ für alle $x \in M$.

2) Sei $y \in M^{-1}$. Dann ist $\Phi(y) = \Phi_y(y^{-1})^{-1}$. Da $y^{-1} \in M$ ist, ist dann $\Phi_y(y^{-1}) \in \{y^{-1}\ \alpha(y)^{-1}\}$.

Also ist $\Phi(y) \in \{y, \alpha(y)\} \subset M \cup M^{-1}$.

Sei $M_1 = M \cup M^{-1}$.

a) Sei $\Phi|_K = 1|_K$. Sei $y \in M^{-1} - M$. Ist $\Phi(y) = \alpha(y) \neq y$, so ist $\alpha(y) = y^{-1} \in M$, was nicht möglich ist, da $\Phi|_M = 1|_M$ ist. Also ist $\Phi(y) = y$. Dann ist $\Phi|_{M1} = 1|_{M1}$.

b) Sei $\Phi|_K = \alpha|_K$. Sei $x \in M$ und $y \in M^{-1} - M$. Nach 1) ist $\Phi(x) = \alpha(x)$.

Ist $\Phi(y) = y \neq \alpha(y)$, so ist $\Phi(y^{-1}) = \alpha(y^{-1}) = y$, was nicht möglich ist.

Also ist $\Phi(y) = \alpha(y)$. Dann ist $\Phi|_{M1} = \alpha|_{M1}$. Die Menge M_1 erfüllt nun die Voraussetzungen von Lemma 10.1. Also ist X nach Lemma 10.1. eine ARR von G.

10. Der Cayleyindex der abelschen Gruppen

A) Die Gruppen Z_2^n, $n \in \mathbb{N}$.

McAndrews gibt in [McA 1] ohne Beweis an, daß $c(Z_2^n) = 1$ ist für $n = 1$ und $n \geq 5$ und $c(Z_2^n) \geq 2$ ist für $2 \leq n \leq 4$.

In [Im 2] beweist Imrich, diese Aussage für $n \geq 8$.

In [Im 3] gibt Imrich einen Beweis der vollständigen Aussage von McAndrews an. Dabei ist ihm jedoch bei Beweis der Aussage für $n = 5$ ein Irrtum unterlaufen (siehe Bemerkung 10.9.).

10.3. LEMMA:

$L = Z_2 = \langle a \mid a^2 = e\rangle$, $H_1 = \emptyset$, $H_2 = \{a\} \Rightarrow c(L,H_1) = c(L,H_2) = 1$, $X = X(L,H_1)$ ist minimale GRR von L.

Beweis:

H_1 und $H_2 = H_1'$ sind die einzigen Cayleymengen von L. Sei $X_i = X(L, H_i)$.

Dann ist $X_1 = E_2$ der kantenlose Graph mit 2 Ecken und $X_2 = C_2$ der vollständige Graph mit zwei Ecken. Es ist klar, daß $A(X_1) = A(X_2) = Z_2$ ist.

10.4. LEMMA:

$L = Z_2^2 = \langle a,b \mid a^2 = b^2 = e\rangle$, $H_1 = \{a\}$, $H_2 = \{a,b\}$;

$\Rightarrow c(L)=c(L,H_1)= c(L,H_2)=2$, $X=X(L,H_1)$ ist minimale ARR von L.

Beweis:

$H_0 = \emptyset$ und $H_1 = \{a\}$ sind Repräsentanten der C-Klassen.

Es ist $c(L,H_0) = a(L,H_0) = 6$ und $c(L,H_1) = a(L,H_1). = 2$. H_2 ist komplementär zu H_1.

Sei $X_1 = X(L,H_1)$. Dann ist $X_1 = C_2 + C_2$ und X_2 der Kreis mit 4 Ecken.

10.5. LEMMA:

$L = Z_2^3 = \langle a,b,c \mid a^2 = b^2 = c^2 = e\rangle$; $H = \{a,b,c\}$;

$\Rightarrow c(L) = c(L,H) = a(L) = 6$; $X = X(L,H)$ ist minimale MMR von L.

Beweis:

Ein RS der C-Klassen von L ist:

$H_0 = \emptyset$	mit	$c(L,H_0) = 7! = 5040$
$H_1 = \{a\}$	mit	$c(L,H_1) = 2^3 * 3! = 48$ und $a(L,H1)=24$
$H_2 = \{a,b]$	mit	$c(L,H_2) = 2*16 = 32$ und $a(L,H2) = 16$
$H_3 = \{a,b,c\}$	mit	$c(L,H_3) = a(L,H_3) = 6$

Der Graph $X = X(L,H_3)$ ist der dreidimensionale Kubus K_3.

10.6. LEMMA:

$L = Z^4 = \langle a,b,c,d \mid a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = e\rangle$, $H = [a,b,c,d,ab,ac,bd \}$;

$\Rightarrow c(L) = a(L) = c(L,H) = 8$, $X = X(L,H)$ ist minimale MRR von L.

Beweis:

Sei H eine CM aber kein CES von L.

Sei o.B.d.A. $U=\langle H \cup \{e\}\rangle \neq L$.

Dann gibt es ein $m \in N$ mit $0 \leq m \leq 3$, so daß $U = Z_2^m$ ist. Mit $n = 2^{4-m}$ gilt dann nach Lemma 2.12.:

$c(G,H) \geq c(Z_2^m)^n \ (n - 1)! \ 2^{m(n-1)}$

Ist $m = 0$, so ist $c(G,H) \geq 15! > 8$

Ist $m = 1$, so ist $c(G,H) \geq 7! \ 2^{15} > 8$

Ist $m = 2$, so ist $c(G,H) \geq 2^4 \ 3! \ 2^6 > 8$

Ist $m = 3$, so ist $c(G,H) \geq 6^2 \ 2^3 > 8$

Ein Computerprogramm.(siehe Anhang 2) ergab das folgende RS der C-Klassen der CES von L und die dazu gehörenden Werte :

i	H_i	$a(L,H_i)$	$c(L,H_i)$
1	(a,b c,d} =:B	24	
2	B ∪ {ab}	12	
3	B ∪ {abc}	24	
4	B ∪ {abcd}	120	
5	B ∪{ab, ac}	8	16
6	B ∪ {ab, cd}	72	
7	B ∪ {ab, acd }	12	
8	B ∪ {abc,abd}	48	
9	B ∪ {ab, ac, ad]	48	
10	B ∪ [ab, ac, bc }	24	
11	B ∪ [ab, ac, bd }	8	8
12	B ∪ {ab, ac, bcd}	8	16
15	B ∪ Iabc,abd,acd}	168	

Sei $X_i = X(L,H_i)$. Anhand, der Inzidenzrelationen prüft man leicht nach, daß gilt: $\langle bc,abc\rangle \ \langle bcd,abcd\rangle \in A_e(X_5)$; $\langle bd,cd\rangle \ \langle abd,acd\rangle \in A_e(X_{12})$ und daß diese

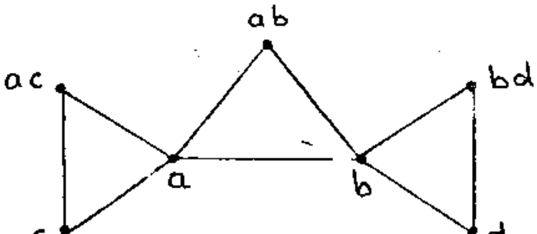


Abb. 1

Automorphismen die einzigen aus $A_e(X_i)$ - {1} sind, die B fest lassen.

Also ist $A_e(X_5)$/Aut(L,H_5) = $A_e(X_{12})$/Aut(L,H_{12}) = 2. Sei X = X(L,H_{11}).

Abb. 1 zeigt den Graphen $X^{(1)}$. Es ist $A_e(X)|_{X^{\wedge}(1)}$ = Aut(L,H_5)$|_{X^{\wedge}(1)}$.

Man prüft nach, daß jedes $\Phi \in A_e(X)$, das H_5 fest läßt, auch G fest läßt.

Also ist $A_e(X)$ = Aut(L,H_5) nach Lemma 3.17.

10.7. LEMMA:

$L = Z_2^5 = < a_i \mid a_i^2 = e. \ (1 \leq i \leq 5)>$,

$H_k = \{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_1a_2,a_1a_3,a_2a_4,a_4a_5,a_1a_2a_3, a_2a_3a_4,a_1a_5\}$

$\Rightarrow$ c(L,H) = 1, X = X(L,H) ist minimale GRR von L.

Beweis:

Eine systematische manuelle Bestimmung einer GRR der Gruppe Z_2 ist wegen, der großen Anzahl der zu untersuchenden CES und der großen Anzahl der Automorphismen der Gruppe Z_2^5 nicht möglich. Aus dem gleichen Grund erscheint auch eine Bestimmung eines RS der C-Klassen der CES durch ein Computerprogramm nicht möglich zu sein. Ein Computerprogramm mit sehr hoher Rechenzeit ergab das folgende Resultat(siehe Anhang 2):

1) Für alle CES H mit |H| ≤ 11 ist a(L,H) ≥ 2.

2) Für das oben angegebene CES H mit |H| = 12 ist a(L,H)=1.

Wir zeigen nun, daß c(L,H) = 1 ist. Sei X = X(L,H). Abb. 2 zeigt den Graphen $X|_H$.

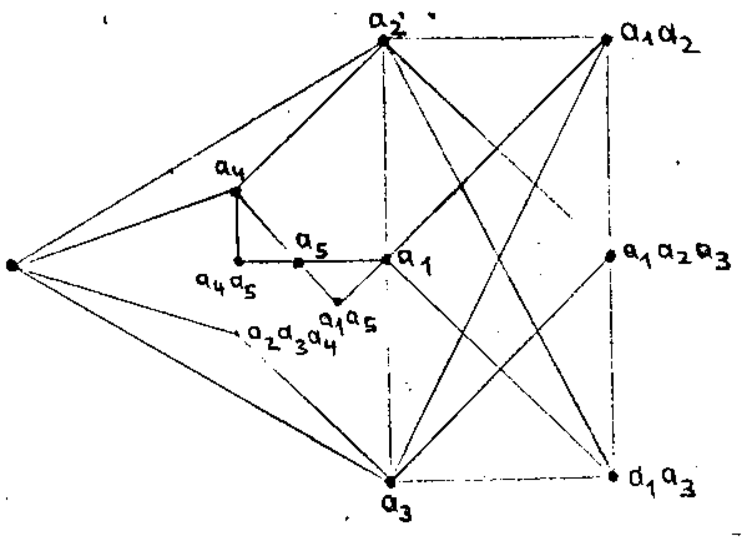


Abbildung 2

Sei B = {a_1,a_2,a_3,a_4,a_5}. Dann folgt aus der Struktur des Graphen $X^{(1)}$, daß die Menge B unter $A_e(X)$ fest bleibt. Da $<B> = L$ ist, ist X eine GRR von L.

Daß $c(Z_2^n) = 1$ ist für $n \geq 6$ folgt nun aus Lemma 10.7. durch sukzessive Anwendung von Folgerung 8.7. Die explizite Angabe einer GRR für die Gruppen $Z_2^n, n \geq 6$, erfolgt in dem folgendem Lemma:

10.8. LEMMA:

$L_n = Z_2^n = < a_i \mid a_i^2 = e;\ 1 \leq i \leq n>,\ n \geq 6$

$H_n = \{a_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{a_i a_{i+1} \mid 5 \leq i \leq n-1\} \cup \{a_1 a_n,\ a_1a_2, a_1a_3, a_2a_4, a_5a_5, a_1a_2a_3, a_2a_3a_4\}$.

$c(L_n,H_n) = 1,\ n \geq 6$

Beweis:

Sei $X_n = X(L_n,H_n)$ und $Y_n = X^{(1)}$. Sei $D_n = \{a_i \mid 5 \leq i \leq n] \cup [a_ia_{i+1} \mid 5 \leq i \leq n\} \cup \{a_1a_n\}$.

Sei das in Lemma 10.7. angegebene CES H der Gruppe Z_2^5 hier mit H_5 bezeichnet. Dann ist $H_n = (H_5 - \{a_1a_5\}) \cup D_n$ für alle $n \geq 6$. Für $n \geq 5$ sei $X_n = X(L_n,H_n)$ und $Y_n = X^{(n)} = X_n|_{H_n}$.

Man überlegt sich nun leicht, daß die Graphen Y_n, $n \geq 6$, aus dem in Abb, 2 angegebenen Graphen Y_5 dadurch entstehen, daß man das Dreieck $\{a_1, a_5, a_1a_5]$ des Graphen Y_5 durch eine Kette von Dreiecken ersetzt. Abb 3 zeigt die Graphen Y_n.

Es folgt nun aus der Struktur der Graphen Y_n, daß die Menge $B_n = \{a_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ unter $A_e(X_n)$ fest bleibt. Da $<B_n> = L_n$ ist, ist X_n eine GRR von L_n.

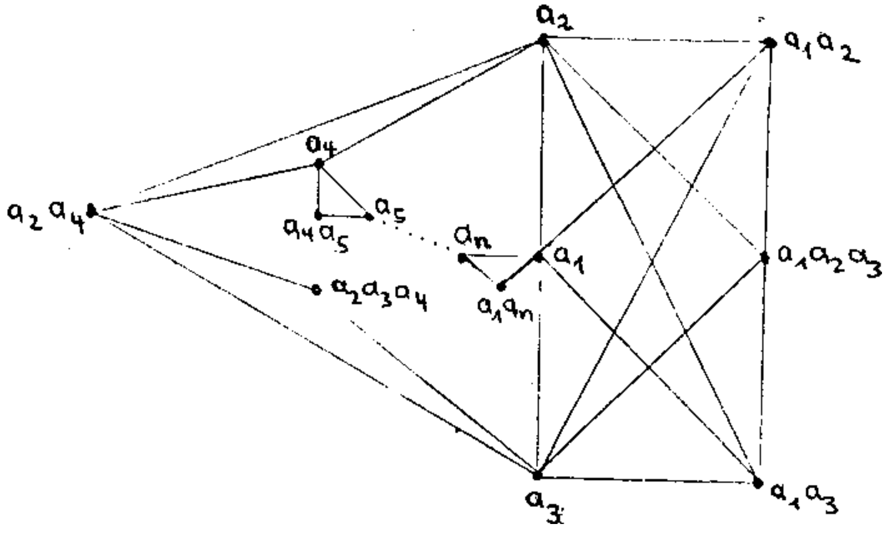


Abbildung 3

10.9. Bemerkung:

In [Im 3] gibt Imrich an, daß $c(L_n,H_n) = 1$ ist, wenn

$H_n = \{ a_i, a_k a_{k+1} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n\} \cup \{a_1 a_2 a_{n-2} a_{n-1}, a_1 a_2 a_{n-1} a_n\}$ und $n \geq 5$ ist.

Es zeigt sich jedoch, daß diese Aussage nur für $n \geq 6$ richtig ist. Sei $\varphi \in Aut(L_5)$ definiert durch: $\varphi(a_1)=a_1a_2a_4a_5$, $\varphi(a_2)=a_4a_5$, $\varphi(a_3)=a_4$, $\varphi(a_4)=a_5$ und $\varphi(a_5)=a_2a_3$.

Dann ist $\varphi[H_5] = H_5$, wie man leicht nachprüft. Also ist $c(L_5H_5) \geq 2$.

10.10. SATZ:

Für n = 1 und $n \geq 5$ ist $c(Z_2^n) = 1$. Es ist $c(Z_2^2) = 2$, $c(Z_2^3) = 6$ und $c(Z_2^4) = 8$.

Beweis: Lemma 10.3. bis 10.8.

B) Die abelschen Gruppen L mit exp(L) > 2.

W. Imrich und M.E. Watkins haben in [Im-Wa 2, Theorem 1] gezeigt, daß für alle abelschen Gruppen L mit exp(L)> 2 mit Ausnahme der Gruppen

$Z_4 x Z_2$, Z_3^2, $Z_4 x Z_2^2$, Z_4^2 und Z_3^3 gilt: c(L) = 2.

Dabei haben sie eine Methode entwickelt, mit der für eine große Anzahl von abelschen Gruppen auf direketem Wege eine ARR angegeben werden kann. Zusätzlich verwenden sie Erweiterungstheoreme. Wir geben in diesem Kapitel im Wesentlichen die Resultate und Methoden von [Im-Wa 2] wieder.

Im Hinblick auf die Untersuchung der Erweiterungen der abelschen Gruppen ist es wichtig, für "kleine" abelsche Gruppen L minimale ARR’s zu bestimmen, um so zu erreichen, daß die Menge L in einem passend gewählten Erweiterungsgraphen stabil bleibt. Für die abelschen Gruppen L mit exp(L) > 2 und o(L) < 32 werden wir deshalb jeweils minimale MRR's bestimmen.

10.11. LEMMA: [Im-Wa 2, Lemma 2,3].

Sei $L = Z_n = \langle a \mid a^n = e\rangle$ und $H = \{a,a^{-1}\}$. Ist $n \geq 3$, so ist c(L) = c(L,H) =2.

Ist n > 4, so ist X = X(L,H) minimale MRR von L.

Beweis:

X = X(L,H) ist ein Kreis der Länge n. Also ist c(L) = c(L,H)=

Ist H = Ø, so ist c(L,H) = (n - 1)! > 2, falls $n \geq 4$ ist. Ist |H|= 1, so ist $U := \langle H\rangle \simeq Z_2$.

Dann ist 2|n und mit m = ½ n gilt nach Lemma 2.12.: $c(L,H) = (m-1)!\, 2^{m-1} > 2$,

falls m>2, d.h. n> 4 ist. Also ist X minimal, falls n> 4 ist.

10.13. LEMMA: [Im-Wa 2, Lemma 2.7]

$L = Z_4 \times Z_2 = (a,b \mid a^4 = b^2 = e\rangle$, $H = \{a,a^{-1},b\}$.

⇒ c(L) = c(L,H) = 6, a(L) = a(L,H) = 2, X(L,H) ist minimale MRR.

Beweis:

Die Orbits von Aut(L) sind: $O_1 = \{a,a^{-1},ab,a^{-1}b\}$, $O_2 = \{b;a^2b\}$, O3 = $\{a^2\}$.

Ein RS der C-Klassen der CM von L ist:

H	$a(L,H_i)$	$c(L,H_i)$
$H_0 = \emptyset$	8	7!
$H_1 = \{a^2\}$	8	$6*2^3$
$H_2 = \{b\}$	4	$6*2^3$
$H_3 = \{a,a^{-1}\}$	4	16
$H_4 = \{b,a^2b\}$	8	16
$H_5 = \{b,a^2\}$	4	16
$H_6 = \{a,a^{-1},a^2\}$	4	6*24
$H_7 = \{a,a^{-1},b\}$	2	6

Der Graph X = $X(L,H_7)$ ist der dreidimensionale Kubus K_3. Also ist $c(L,H_7) = 6$.

10.14. LEMMA: [Im-Wa 2, Lemma 2.4]

$L = Z_3^2 = <a,b \mid a^3 = b^3 = e>$, $H = \{a,a^{-1},b,b^{-1}>$,

⇒ c(L) = a(L) = c(L,H) = 8, X(L,H) ist minimale MRR.

Beweis:

Der einzige Orbit von Aut(L) ist:

$O_1 = \{a,a^{-1},b,b^{-1},ab,a^{-1}b^{-1},ab^{-1},a^{-1}b] = L - \{e\}$.

Sei $H_2 = \{a,a^{-1};b,b^{-1}\}$. **Abb. 5** zeigt den Graphen $Aut(L,H_2)|_{H_2}$. Bleibt H_2 unter einem φ ∊ A (X) fest, so bleibt auch L unter φ fest. Nach Lemma 3.17. ist dann $A_e(X)=Aut(L,H_2)$.

Also ist c(L) = a(L) = c((L,H) = 8.

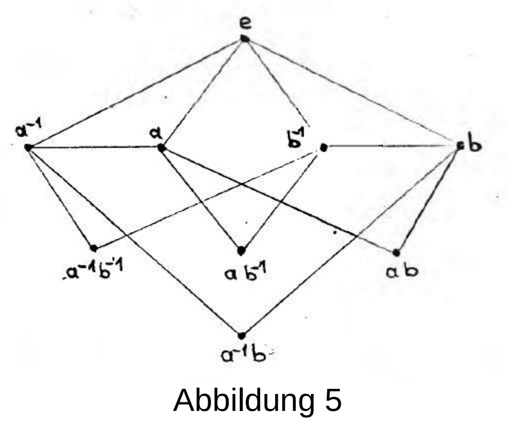


Abbildung 5

10.15. LEMMA:

$L = Z_4 \times Z_2^2 = <a,b,c \mid a^4 = b^2 = c^2 = e>$, $H = \{a,a^{-1},b,c,bc,a^2c,a^2bc\}$.

⇒ c(L) = c(L,H) = 8, a(L) = a(L,H) = X(L,H) ist minimale MRR.

Beweis:

Die Orbits von Aut(L) sind:

O_1 = {a,ab,ac,abc}, O_2 = {b,c,bc,a^2b,a^2c3,a bc}, O_3= {a^2}.

Ein RS der A-Klassen der CES von L ist:

H_I =	{a,a^{-1},b,c}	mit a(L,Hx) =	4
H_{II}=	{a,a^{-1},ab,a^{-1}b,c}		8
H_{III} =	{a,a^{-1},b,c,bc}		12
H_{IV}=	{a,a^{-1},b,c,a^2b }		4
H_V=	{a,a^{-1},b,c,a^2bc}		4
H_{VI} =	{a, a^{-1}, ab,a^{-1}b,b,c}		4
H_{VI}I =	{a,a^{-1},ab,a^{-1}b,c,bc}		8
HVIII=	{a,a^{-1},ab,a^{-1}b,c, a^2c}		16
H_{IX} =	{a,a^{-1},ab,a^{-1}b,c,a^2bc}		8

Sei L‘ = Z Z_2^4 = <a,b,c,d | a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = e>

Die Abb. β:L—> L' sei definiert durch: β(a) = a, β(a^2) = d, β(a^{-1}) = ad, β(c) = c, β(b) = b und β(xy) = β(x)β(y) für alle x ∊L und alle y ∊ <b,c>.

Nach Lemma 5.5. ist dann der Graph Y =X(L‘,β[H]) isomorph zum Graphen X = X(L,H). Es ist nun: β[H] = {a,b,c,d,ad,bc,cd}. Aus Lemma 10.4. folgt nun, daß β[H] aus der einzigen C-Klasse von L‘ ist, für die der Cayleyindex = 8 ist. Also ist c(L) = c(L,H) = 8 und X = X(L,H) eine minimale MRR von L. Da H aus der A-Klasse I von L ist, ist a(L) = a(L,H) = 4.

10.12. LEMMA:

Sei L = Z_{2n} x Z_2 = <a,b| a^{2n} =b^2 = e> und H = [a,a $^{-1'}$}.

Ist n ≥ 3, so ist c(L) = c(L,H) = 2 und X = X(L,H) minimale MRR von L.

Beweis:

Sei n ≥ 3. Sei X = X(L,H). Dann ist S_2 = { a^2,a^{-2},ab,a^{-1}b}. **Abb. 4** zeigt den Graphen Y = $X^{(2½)}$

.

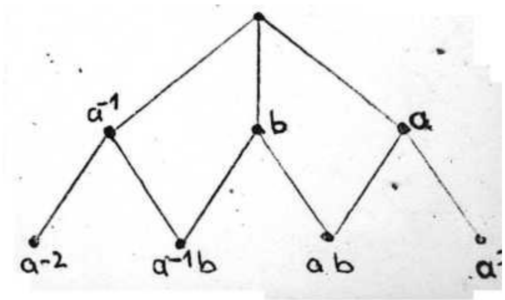


Abbildung 4

Aus der Struktur des Graphen Y folgt, daß b unter $A_e(X)$ fest bleibt. Also ist $A_e(X)|_H$ = $Aut_0(L)|_H$. Da <H>= L ist, ist $A_e(X) = Aut_0(L)$.

Also ist c(L,H) = 2. Ist H ein CES von L, so ist |H|≥3. Ist H kein CES von L, so ist nach Lemma 2.12. c(L,H) ≥ min [½ o(L), 48] ≥ 6. Also ist X eine minimale MRR von L.

10.16. LEMMA:

$L = Z_4^2 = < a^4 = b^4 = e>$, $H = \{a,a^{-1},b,b^{-1}, ab,a^{-1}b^{-1},a^2\}$

⇒ c(L) = a(L) = c(L,H) =4,X = X(L,H) ist minimale MRR von L.

Beweis:

Die Orbits von Aut(L) sind: $O_1 = \{a,b,ab,ab^{-1},ab^2,a^2b\}^{\pm 1}$; $O_2 =\{a^2,b^2.a^2b^2\}$

Ein RS der A-Klassen der CES von L ist:

$H_I = \{a,a^1;b,b^{-1}\}$=:B	mit $a(L,H_X)$ =	8
H_{II}= B ∪ $(a^2\}$		4
H_{III}= B ∪ $\{a^2b^2\}$		8
H_{IV}= B ∪ $\{ab,a^{-1}b^{-1}\}$		12
H_V = B ∪ $[ab^2,a^{-1}b^2\}$		8
H_{VI}= B ∪ $[ab,a^{-1}b^{-1},a^2\}$		4
H_{VII}= B ∪ $(ab^2,a^{-1}b^2,a^2\}$		8
H_{VIII}= B ∪ $\{ab^2,a^{-1}b^2,b^2\}$		8
H_{IX}= B ∪ $[ab^2,a^{-1}b^2,a^2b^2\}$		8

Ein RS der C-Klassen, die in den A-Klassen II und VI enthalten sind, ist:

$H_1 = |a,a^{-1},b,b^{-1},a^2 \}$ mit C(L,H) ≥ 8

$H_2 = [a,a^{-1},b,b-1,b^2,a^2b^2 \}$ ≥8.

$H_3 = \{a,a^{-1},b,b^{-1},ab,a^{-1}b^{-1},a^2\}$ = 4

Sei Φ_1 = <a^2,a,a^{-1}><$a^2b,ab,a^{-1}b$> <$a^2b^{-1},ab^{-1},a^{-1}b$><$a^2b^2,ab^2,a^{-1}b$???>

$\Phi_2 = <a^2b^2,b,b^{-1}><b^2,a^2b,a^2b^{-1}><ab^2,a^{-1}b,a^{-1}b^{-1}><a^{-1}b^2,ab,ab^{-1},???>$

Für i=1,2 ist dann $\Phi_i \in A(L,H_i)$, wie man leicht nachprüft. Also ist $c(L,H_i) \geq 8$ für i = 1,2.

Sei X =X(L,H_3). **Abb. 6** zeigt den Graphen Y = $X|_{H3}$. Es ist $A_e(X)|_{H3} = Aut(L,H_3)|_{H3}$.

Läßt ein $\Phi \in A_e(X)$ die Menge H_3 fest, so läßt Φ auch L fest, wie man anhand der Inzidenzrelationen leicht nachprüft. Nach Lemma 3.17. ist dann A (X) = Aut(L,H_3).

Ist H eine CM, aber kein CES, so ist nach Lemma ???? c(L,H) ≥ 8. Also ist c(L) = a(L) = c(L,H_3) = 4.

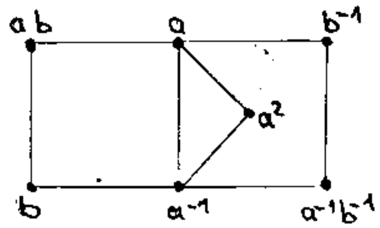


Abbildung 6

10.17. LEMMA:

$L = Z_6xZ_3 = <a,b \mid a^6 = b^5 = e>$, H = { a, a^{-1}, a^2, a^{-2},b,b^{-1},ab, $a^{-1}b^{-1}$}

⇒ c(L,H) = 2, X = X(L,H) ist minimale ARR von L. α(H) = 3, $L \in S_{2,2} \cap S_{3,1}$

Beweis:

Sei r = a^2, s = b und t = a^3. Dann ist $L = <r,s,t|r^3 = s^3 = t^2 = e>$.

Die Orbits von Aut(L) sind: $O_1 = [r,s,rs,rs^{-1}\}^{\pm1}$, $O_2 = \{rt,st,rst,rs^{-1}t\}^{\pm1}$, $O_3 = \{t\}$.

Ein RS der A-Klassen der CES von L ist:

H_I = {r, rt} mit a(L,H) =	4
H_{II} = {rt, st}	8
H_{III} = {r,s,t}	8
H_{IV} = {r, s, rt}	4
H_V = {r, s, rst}	4
H_{VI} = {r,rt,st}	4
H_{VII} = {r,st,rst}	4
H_{VIII} = {r,s,rt,st }	8
H_{IX} = [r,s,rt,rs^{-1}}	2'

Es ist nun $H_{IX} = \{a^2,b,a^{-1},a^{-1}b^{-1}\}^{\pm 1} = H$. Sei $X=X(L,H)$ und $Y=X|_H$. **Abb.7** zeigt den Graphen Y. Aus der Struktur des Graphen Y folgt, daß $A_e(X)|_H = \mathrm{Aut}_0 G)|_H$ ist. Also ist $c(L,H) = 2$.

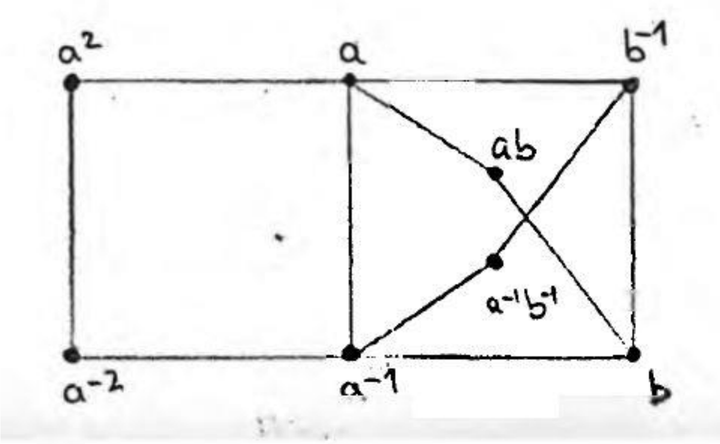


Abbildung 7

10.18. LEMMA:

$L = Z_6 * Z_2^2 = (a,b,c \mid a^6 = b^2 = c^2 = e >$, $H = \{a,a^{-1},ab,a^{-1}b,a^3,b,c\}$.

$\Rightarrow c(L,H) = 2$ und $X(L,H)$ ist minimale ARR von L. $\alpha(H) = 0$, $L \in S_{2,4} \cap S_{3,3}$.

Beweis:

Sei $d = a^3$ und $s = a^2$. Sei $L_0 = \langle b,c,d \rangle$. Dann ist $L_0 \quad Z_2^3$ und $L = \langle s \mid s^3 = e \rangle \times L_0$.

Die Orbits von Aut(L) sind: $O_1=\{b,c,d,bc,bd,cd,bcd\} = L_0-\{e\}$, $O_2=\{s,s^{-1}\}$ und $O_3 = \{s,s^{-1}\}$.

Repräsentanten der drei ersten A-Klassen der CES von L mit $a(L,H) = 2$ sind:

$H_I= \{sd,s^{-1}d,sb,s^{-1}b,d,c\}$; $H_{II}= \{sd,s^{-1}d,sb,s^{-1}b,d,c,bd\}$; $H_{III}=\{sd,s^{-1}d,sb,s^{-1}b,sc,s^{-1}c,d,bd\}$.

Es ist $c(L,H_I) > 2$, wie man leicht nachprüft. Ebenso prüft man nach, daß $c(L,H_{II}) = 2$ ist. Ist H aus der Klasse I und $H \neq H_I$, so ist $|H| \geq 8$. Da $|H_{II}|=7$ ist, ist $X(L,H_{II})$ minimale ARR von L. Es ist nun $H_{II} = \{a,a^{-1},a^2b,a^{-2}b,a^3,c,a^3b\}$.

Also ist H_{II} isomorph zu $H=\{a,a^{-1},ab,a^{-1}b,a^3,c,b\}$. Dann ist $c(L,H) = 2$ und H minimale ARR von L.

10.19. LEMMA:

$L = Z_5^2 = \langle a,b \mid a^5 = b^5 = e \rangle$, $H = [a,a^{-1},b,b^{-1},ab,a^{-1}b^{-1},a^2b^{-2},a^{-2}b^2, a^2,a^{“-2}\}$.

$\Rightarrow c(L,H) = 2$, $X = X(L,H)$ ist minimale ARR von L. $\alpha(H) = 2$, $L \in S_{2,3} \cap S_{3,2}$.

Beweis:

Der einzige Orbit von Aut(L) ist $O_1 = L - \{e\}$. Die Cayleyklassen der Gruppe L wurden mit einem Computerprogramm bestimmt (siehe Anhang 2).

Für drei C-Klassen ist $a(L,H) = {}_{;}2$. Repräsentanten dieser Klassen sind:

$H_1 = \{a,b,a^2,ab,a^2b^{-2}\}$, $H_2 = \{a,b,a^2,b^2,ab,ab^2\}$, $H_3 = \{a,b,a^2,ab,ab^2,ab^{-1}\}$

Es ist $c(L,H_1) = c(L,H_2) = c(L,H_3) = 2$. Wir beweisen diese Aussage nur für $H = H_1$.

Sei $X = X(L,H)$. Abb. 8 zeigt den Graphen $Y = X|_H$.

Es ist $N(a) \cap N(a^2b^{-2}) = \{e,a^{-2}b^{-2}\}$ und $N(a^{-1}) \cap N(a^2b^{-2}) = \{e,ab^{-2},a^2b^2,a^{-2}b^2,a^{-2}b^{-1},a^{-1}b\}$.

Sei $K = \{a,a^{-1},a^2b^{-2},a^{-2}b^2\}$. Dann bleibt K unter $A_e(X)$ stabil und es gilt $A_e(X)|_K = Aut_0(L)|_K$.

Da $\langle K \rangle = L$ ist, ist $c(L,H) = 2$ nach Lemma 10.1.

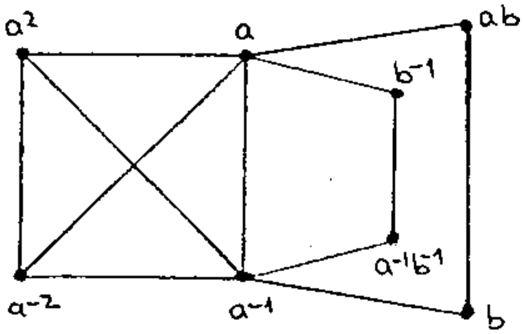


Abbildung 8

10.20. LEMMA:

$L = Z_3^3 = \langle a_i \mid a_i^3 = e\ (i = 1,2,3)\rangle$, $H = \{a_1,a_2,a_3,a_1a_2,a_1a_3,a_2a_3\}^{\pm 1}$.

$\Rightarrow c(L) = a(L) = c(L,H) = 12$ und $X(L,H)$ ist minimale MRR.

Beweis:

Der einzige Orbit von Aut(L) ist $O_1 = L - \{e\}$.

Die C-Klassen der CES von L wurden mit einem Computerprogramm bestimmt (siehe Anhang 2). Das Programm ergab das in folgender Liste aufgeführte RS der C-Klassen und die zugehörigen Werte a(L,H) :

Nr	H	a(L,H)
1	$\{a_1,a_2,a_3\}^{\pm 1} = B$	48
2	$B \cup \{a_1a_2\}$	24
3	$B \cup \{a_1a_2a_3\}$	48
4	$B \cup \{a_1a_2, a_1a_3\}$	16
5	$B \cup \{a_1a_2, a_1a_2^{-1}\}$	96
6	$B \cup \{a_1a_2, a_1a_2^{-1}a_3\}$	24
7	$B \cup \{a_1a_2,a_1a_3, a_2a_3\}$	12
8	$B \cup \{a_1a_2,a_1a_3, a_1a_2^{-1}\}$	24
9	$B \cup \{a_1a_2,a_1a_3, a_1a_2^{-1}\}$	48
10	f $B \cup \{a_1a_2,a_1a_3, a_1a_2^{-1}\}$	144

Da $H = H_7$ ist, ist $a(L) = a(L,H) = 12$. Sei $X = X(L,H)$. Wir zeigen, daß $c(L,H) = 12$ ist.

Seien $i,j,k \in \{1,2,3\}$, so daß $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ ist. Dann ist:

$N_1(a_i) = \{ a_i^{-1}, a_j^{-1}, a_k^{-1}, a_ia_j, a_ia_k\}$ $N_1(a_ia_j) = \{a_i,a_j, a_j^{-1}a_i^{-1}\}$

$N_1(a_ia_j^{-1}) = \{a_i, a_i^{-1},a_j, a_j^{-1}, a_ia_j, a_i^{-1}a_j^{-1}\}$ $N_1(a_ia_ja_k^{-1}) = \{a_k^{-1}, a_ia_j, a_ia_k, a_ja_k\}$

$N_1(a_1a_2a_3) = \{ a_1,a_2,a_3, a_1a_2, a_1a_3,a_2a_3 \}$

Abb. 9 zeigt den Graphen $Y = X|_H$. Aus der Betrachtung der Eckengrade im Graphen Y folgt, daß die Menge $B = \{a_1,a_2,,a_3\}^{\pm 1}$ unter $A_e(Y)$ stabil bleibt.

Sei $B_1 = \{a_1,a_2,a_3\}$ und $B_2 = \{a_1,a_2,a_3\}^{-1}$. Dann sind B_1 und B_2 Blöcke von A (Y). Man überlegt sich nun leicht, daß $|A(Y)| = 12$ ist.

Daraus folgt nun, daß $A_e(X)|_H= A(Y) = Aut(L,H)|_H$ ist. Sei $\Phi \in A_e(X)$, so daß $\Phi|_H = 1|_H$ ist.

Sei $M = L - \{a_ia_j^{-1} |\ i,j \in \{1,2,3\},\ i \neq j\}$. Dann ist auch $\Phi|_M = 1|_M$. Es ist nun für $i \neq j$:

$N_1(a_ia_j^{-1}) = \{ a_ia_j^{-1}a_k, a_ia_j^{-1}a_k^{-1},a_i^{-1}a_j^{-1}a_k,a_ia_ja_k^{-1}\}$. Also $N_2(a_ia_j^{-1}) \neq N_2(a_i^{-1}a_j)$.

Dann ist insbesondere für alle $x,y \in L - M$: $N(x,M) = N(y,M)$, wenn $x \neq y$ ist.

Daraus folgt, daß auch die Menge L-M unter Φ fest bleibt. Also ist dann $\Phi = 1$.

Aus Lemma 3.17. folgt dann, daß $A_e(X) = Aut(L,H)$ ist. Also ist $c(L,H) = 12$.

Sei K eine CM, aber kein CES und o.B.d.A. $U := <K \cup \{e\}>$. Nach Lemma 2.12. ist dann $c(L,K) \geq \frac{1}{2} |L| > 13$. Also ist $c(L) = c(L,H) = 12$.

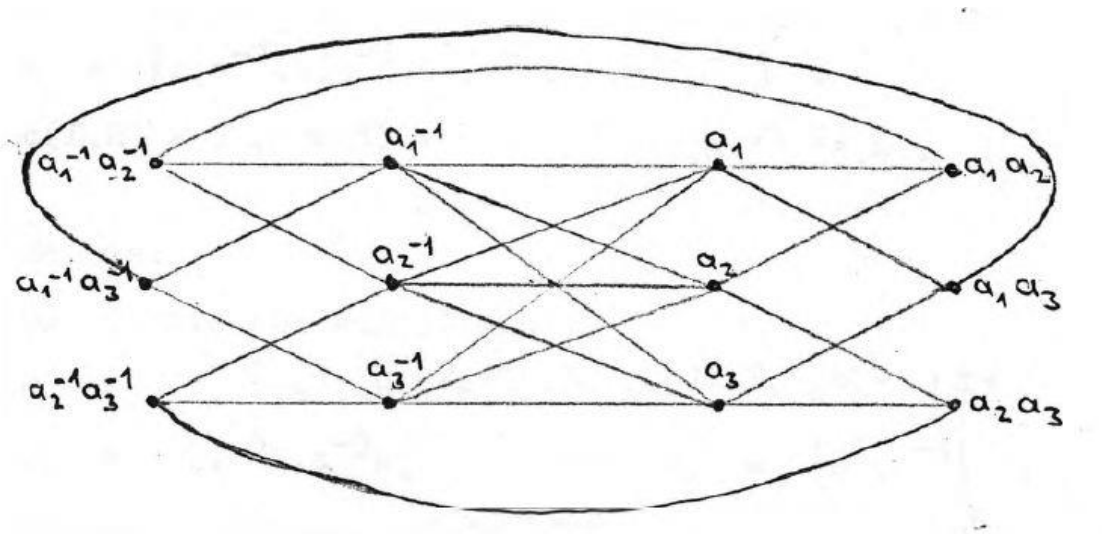


Abbildung 9

10.21. LEMMA:

$L = Z_9 \times Z_3 = <a,b|\ a^9 = b^3 = e>$, $H = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}, a^2, a^{-2}, ab, a^{-1}b^{-1}\}$.

$\Rightarrow c(L,H) = 2$, $\alpha(H) = 2$, $L \in S_{2,6} \cap S_{3,4}$.

Beweis:

Die Orbits von Aut(L) sind:

$O_1 = \{a, a^2, a^4, ab, a^2b^{-1}, a^4b, ab^{-1}, a^2b, a^4b^{-1}\}$

$O_2 = [b, a^3b, a^{-3}b]$ und $O_3 = \{a^3, a^{-3}\}$

Repräsentanten der fünf ersten A-Klassen der CES von L sind:

$H_I = [a,b]^{\pm 1}$	mit a(L,H) = 4
$H_{II} = [a,ab]^{\pm 1}$	mit a(L,H) = 4
$H_{III} = [a,a^2,ab]^{\pm 1}$	mit a(L,H) = 4
$H_{IV} = [a,a^2,ab]^{\pm 1}$	mit a(L,H) = 2
$H_V = [a,a^2,ab,b]^{\pm 1}$	mit a(L,H) = 2

Es ist $H = H_V$. Wir zeigen, daß c(L,H) = 2 ist. Sei X = X(L,H) und $Y = X|_H$.

Abb. 10 zeigt den Graphen X. Es ist $Ä_e(X)|_H = Aut_0(L)|_H$. Also ist c(L,H) = 2.

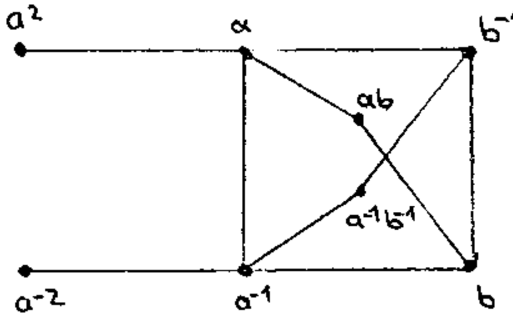


Abbildung 10

10.22. LEMMA:

$L = Z_4 \times Z_2^3 = \langle a,b,c,d \mid a^4 = b^2 = c^2 = d^2 = e \rangle$, $H = \{a,a^{-1},ab,a^{-1}b,ac,a^{-1}c,b,c,d,cd,a^2d\}$.

$\Rightarrow$ c(L,H) = 2, α(H) = 2, $L \in S_{2,4} \cap S_{3,3}$.

Beweis:

Sei $L_0 = \langle a,b,d \rangle$. Dann ist $L_0 \simeq Z_2^3$. Die Orbits von Aut(L) sind:

$O_1 = \{ a,a^{-1}\}L_0$, $O_2 = \{e,a^2\}(L_0 - \{e\})$, $O_3 = \{a^2\}$. Wir zeigen, daß c(L,E) = 2 ist.

Sei X = X(L,H). Abb. 11 zeigt den Graphen $Y = X|_H$. Sei K = H-{d,cd}.

Dann ist $A_e(x)|_K = Aut(G)|_K$. Da $\langle K \rangle = L$ ist, ist nach Lemma 10.1. c(L,H) = 2.

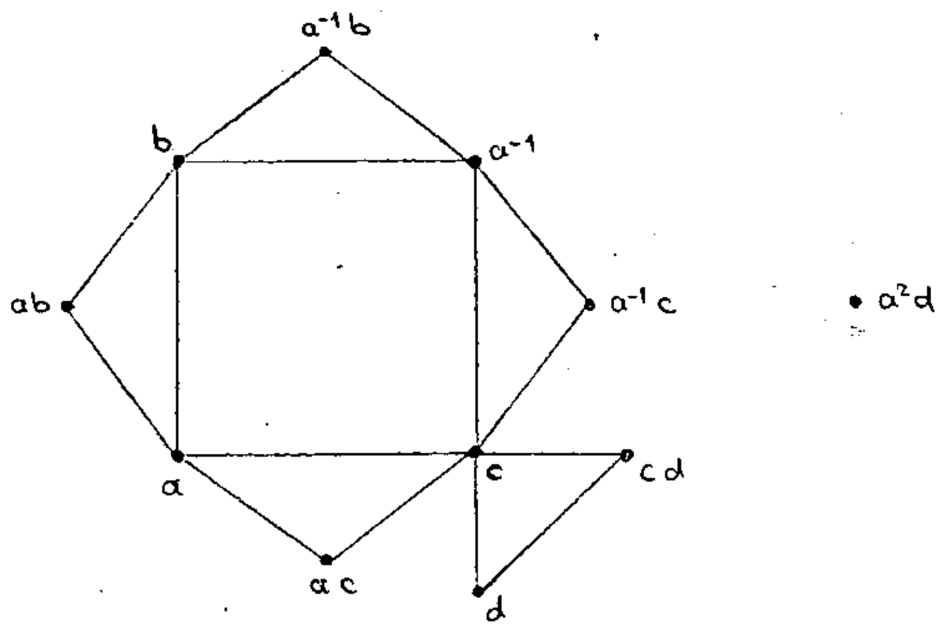


Abbildung 11

10.23. LEMMA:

$L = Z_4^2 \times Z_2 \cong \langle a,b,c | a^4 = b^4 = c^2 = e \rangle$, $H = \{a,b,ab,bc,a^2,c\}^{\pm 1}$

$\Rightarrow c(L,H) = 2$, $\alpha(H) = 4$, $L \in S_{2,7} \cap S_{3,5}$.

Beweis:

Die Orbits vor Aut(L) sind:

$O_1 = \{a,b,ab,ab^{-1},ab^2,a\ b,ac,bc,abc,ab^{-1}c,ab^2c,a^2bc\}$, $O_2 = \{a^2,b^2,a^2b^2\}$,

$O_3 = \{c,a^2c,b^2c,a^2b^2c\}$. Wir zeigen, daß $c(L,H) = 2$ ist. Sei $X = X(L,H)$.

Abb. 12 zeigt den Graphen $Y = X|_H$. Aus der Struktur des Graphen Y folgt, daß

$A_e(X)|_H = A(Y) = Aut_0(L)$ ist. Also ist $c(L,H) = 2$.

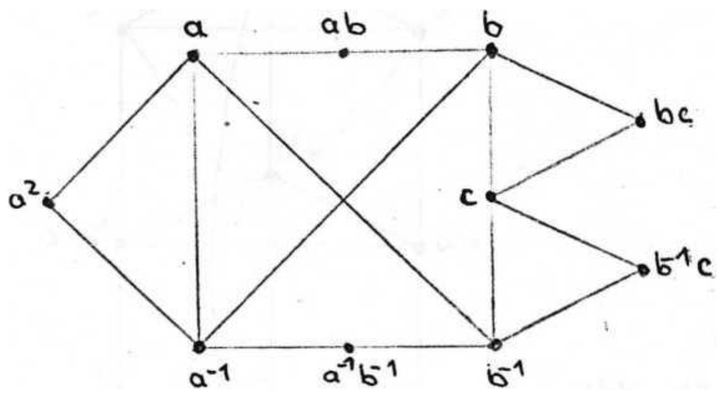


Abbildung 12

10.24. LEMMA:

$L = z_4^3 = \langle a,b,c \mid a^4=b^4=c^4 = e\rangle$; $H = \{a,b,c,ab,bc,a^2,b^2, a^2b^2\}^{\pm 1} \Rightarrow c(L,H) = 2$.

Beweis:

Die Orbits von Aut(L) sind

$O_1 = \{a^2,b^2,c^2,a^2b^2,a^2c^2,b^2c^2,a^2c^2,b, a^2b^2c^2\}$, $O_2 = L - (O_1 \cup \{e\})$.

Wir zeigen, daß $c(L,H) = 2$ ist.-Sei $X = X(L,H)$. Abb. 13 zeigt den Graphen $Y = X|_H$.
Aus der Struktur des Graphen Y folgt, daß $A_e(X)|_H = A(Y) = Aut_0(L)|_H$ ist. Nach Lemma 10.1. ist dann $c(L) = c(L,H) = 2$.

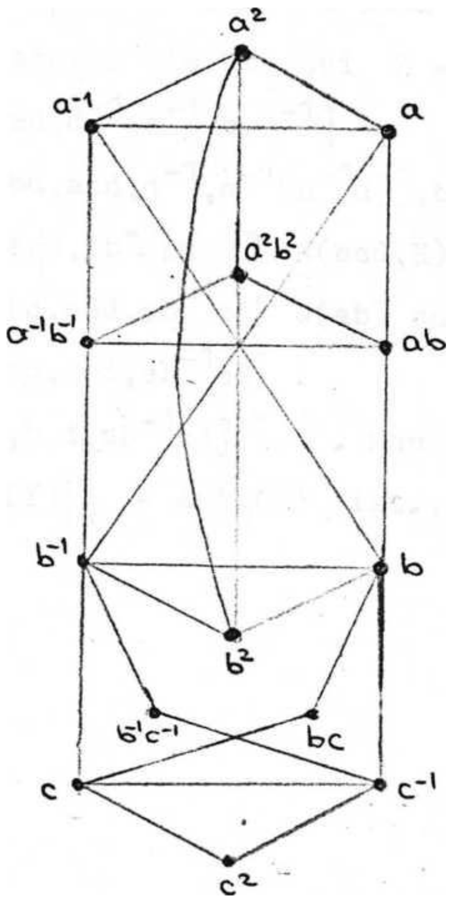


Abbildung 13

10.25. LEMMA:

$L = Z_3^4 = \langle a,b,c,d \mid a^3 = b^3=c^3=d^3= e\rangle; H=(\langle a,b,c\rangle - \{e,a,a^{-1},b,b^{-1}\})\cup\{d,ad,bd,acd,ab^{-1}cd\}^{\pm 1}$
$\Rightarrow c(L,H) = 2$.

Beweis:

Sei $L_0 = \langle a,b,c\rangle$ und $H_0 = |a,a^{-1},b,b^{-1}\}$. Sei $X = X(L_0,H_0)$. Es ist $\beta(H_Q) = 8-1=7$.
Dann ist $L_0 - \beta(H_0) = 20$. Also ist X aus der Klasse $Q_{3,n}$. Dann ist X' aus der Klasse $R_{3,n}$.
Sei $Y = X(L,H)$. Dann bleibt L unter A (Y) stabil, da mit

$K = \{ d, ad, bd, acd, ab^{-1},c,d\}$ gilt: $H = H_0' \cup K \cup K^{-1}$. Sei $M = H_0 \cup K \cup K^{-1}$.

Dann bleibt auch die Menge M unter $A_e(Y)$ stabil bleibt. Sei $Z = Y|_M$. Dann ist in Z :

$N(a) =\{ad,d^{-1},a^{-1},b,b^{-1}\}$ $N(b) = \{bd,acd,d^{-1},a^{-1}bc^{-1}d^{-1},b^{-1},a,a^{-1}\}$

$N(d,K) = \{ acd,ab^{-1},cd\}$ $N(acd,K) = \{d,ad,bd\}$

$N(ad,K) = \{bd,acd,ab^{-1}cd]$ $N(ab^{-1}cd,K)= \{d,ad,bd\}$

$N(bd,K) = \{ad,acd,ab^{-1}cd]$

Sei $N = \{a,b,d,ab^{-1}cd\}$.

Man überlegt sich leicht, daß dann $A_e(Y)|_N = Aut_0(L)$ ist, Also ist dann $c(L,H) = 2$.

10.26. Definition: [Im-Wa 2, p. 14]

Sei L eine abelsche Gruppe, und seien $g, h \in L$ Sei definiert:

$C(g,h) =\{g,g^{-1},h,h^{-1},gh,g^{-1}h^{-1}\}$; $C_2(g) = (g, g^{-1},g^2, g^{-2}\}$; $C_3(g) =\{g, g^{-1},g^2, g^{-2}, g^3, g^{-3}\}$.

10.27 SATZ: [Im-Wa 2, Theorem 1]

Sei L eine abelsche Gruppe und $L = (m_1, m_2,,\ldots,m_r) =<a_i \mid a_i^{mi} = e,1\leq i \leq r>$ die Standardrepräsentation der Gruppe L. Sei $m_1 \geq 6$ und $m_r \geq 3$.

1) Ist $r = 1$, so sei $H = \{a_1, a_1^{-1}\}$.

2) Ist $r \geq 2$ und $m \geq 4$, so sei: $H = C_3(a_1) \cup \bigcup_{i=1}^{r-1} C(a_i,a_{i+1}) \cup C_2(a_r)$.

3) Ist $r \geq 2$ und $m_r = 3$, so sei:

$$H = C_3(a_1) \cup \bigcup_{i=1}^{q} C(a_i,a_{i+1}) \cup \bigcup_{j=0}^{r-(q+1)} C(a_q\ldots a_{q+j}), a_{q+j+1}).$$

Dann ist $c(L) = c(L,H) = 2$.

Beweis:

[Im-Wa 2, Beweis von Theorem 1]

10.28. LEMMA:

Ist $k>2n+5$,so ist die Gruppe $Z_k \in \underline{S}_{2,n}$.

Ist $k >3n+4$, so ist die Gruppe $Z_k \in \underline{S}_{3,n}$.

Ist $k >2n+5$, so ist die Gruppe $Z_k \in \underline{S}_{m,n}$ für alle $m\geq 4$,

Beweis:

Sei $k \in \mathbb{N}$ und $Z_k = (a \mid a^k = e>$. Sei $H = \{a,a^{-1}\}$. Sei $X_k = X(Z_k,H)$. Dann ist X_k eine ARR von Z_k. Es ist $\beta(H_k) = 2|H_k| = 4,(k \geq 4)$. Ist $k \geq 2n + 5$, so ist: $o(Z_k)-\beta(H) = k - 4 \geq 3n > 2n$. Nach Lemma 7.7. ist dann $X_k \in Q_{3,n}$ und deshalb $Z_k \in \underline{S}_{3,n}$.

Ist $k \geq 3n+4$, so ist $o(Z_k) - 2|H| = k - 4 \geq 3n > 2n$ und $2/3*o(Z_k)-H =2/3*k-2 \geq 2n +2/3>2n$. Nach Lemma 7.7. ist dann $X_k \in Q_{3,n}$ und deshalb $Z_k \in \underline{S}_{3,n}$.

Ist $k \geq 2n + 3$, so ist: $o(Z_k) - ½* \beta(H) = k - 2 \geq 2n + 1 > 2n$.

Nach Lemma 7.7. ist dann $X \in Q_{m,n}$ und $Z_k \in \underline{S}_{m,n}$ (m ≥4).

10.29. LEMMA:

Für k ≥ 3 sei $L_k = Z_{2k} \times Z_2$. Sei $n \in \mathbb{N}$.

1) Ist 4k ≥ 2(n + 3), so ist $L_k \in \underline{S}_{2,n}$.

2) Ist 4k ≥ 3(n + 2), so ist $L_k \in \underline{S}_{3,n}$.

3) Ist 4k ≥ 2n + 3, so ist $L_k \in \underline{S}_{m,n}$ für alle m ≥ 4

Beweis:

Es ist $L_k = Z_{2k} \times Z_2 = \langle a,b \mid a^{2k} = b^2 = e\rangle$. Sei $H = \{a,a^{-1},b\}$.

Nach Lemma 10.12. ist dann $X_k= X(L_k,H)$ eine minimale ARR von L.

Es ist $\alpha(H) = 0$. Also ist $\beta(H) = 2|H|$.

1)Ist 4k>3(n+3), so ist o(G)-β(H)>3n. Nach Lemma 7.7. ist dann $X_k \in Q_{m,n}$. Also ist $L_k \in \underline{S}_{2,n}$

2) Ist 4k>3(n+2), so ist o(G)-β(H)>3n. Nach Lemma 7.7. ist dann $X_k \in Q_{3,n}$.Also ist $L_k \in \underline{S}_{3,n}$.

3) Ist 4k>2n + 3, so ist o(G) - 1/2* β(H)>2n. Nach Lemma 7.7. ist dann $X_k \in Q_{m,n}$ für m ≥4.
Also ist $L_k \in S_{m\,n}$ für alle m ≥ 4.

10.30. LEMMA:

Sei L eine abelsche Gruppe mit exp(L)> 2 und c(L) = 2.

1) Ist o(L) ≥ 8, so ist $L \in S_{2,1}$.

2) Ist o(L) ≥11 und L keine der Gruppen (12.1)=(6,2) und (18.1)=(6,3), so ist $L \in S_{2,3}$.

3) Ist o(L) ≥13 und L keine der Gruppen (18.1)=(6,3),und (25.1)=(5,5), so ist $L \in S_{2,4}$.

4) Ist o(L) ≥ 10, so ist $L \in S_{3,1}$.

5) Ist o(L) ≥ 13 und L keine der Gruppen (18.1)=(6,3), (25.1)=(5,5), so ist $L \in S_{2,4}$.

6) Ist o(L) ≥ 5, so ist $L \in S_{m,1}$ für alle m ≥ 4.

7) Ist o(L) ≥ 9, so ist $L \in S_{m,3}$ für alle m ≥ 4.

Beweis:

1) Satz 7.17., 4).

2) Ist o(L) ≥ 24, so ist $L \in S_{2,4}$ nach Satz 7.17.
Ist $L = Z_k$ und k ≥ 11, so ist $L \in S_{2,3}$ nach Lemma 10.2.
Ist L nicht zyklisch und 11 ≤ o(L) ≤ 24, so folgt die Aussage aus Tabelle 1.

3) Ist o(L) ≥ 32, so ist $L \in S_{2,3}$ nach Satz 7.17.
Ist $L = Z_k$ und k ≥ 13, so ist $L \in S_{2,4}$ nach Lemma 10.28.
Ist L nicht zyklisch und 13 ≤ o(L) ≤ 32, so folgt die Aussage aus Tabelle 1.

4) Satz 7.17., 2).

5) Ist $o(L) \geq 30$, so ist $L \in S_{3,3}$ nach Satz 7.17.

Ist $L = Z_k$ und $k \geq 13$, so ist $L \in S_{3,3}$ nach Lemma 10.28.

Ist L nicht zyklisch und $13 \leq o(L) < 30$, so folgt die Aussage aus Tabelle 1.

6) Satz 7.17., 3).

7) Ist $o(L) \geq 12$, so ist $L \in S_{m,3}$ für $m \geq 4$ nach Satz 7.17.

Ist $L = Z_k$ und. $k \geq 9$, so ist $L \in S_{m,4}$ für $m \geq 4$ nach Lemma 10.28.

Ist L nicht zyklisch und $9 \leq o(L) < 12$, so folgt die Aussage aus Tabelle 1.

10.31. SATZ: ([Im-Wa 2, Cor. 2.9])

Sei L eine abelsche Gruppe aus $S_{2,1}$ mit $c(L)=2$ und $\exp(L)>2$. Dann ist $c(L \times Z_2) = 2$.

Beweis:

Sei o.B.d.A. $X = X(L,H)$ eine ARR von L aus der Klasse $R_{1,2}$.

Sei $L_1 = L \times Z_2$ und $b \in L_1 - L$, so daß $b^2 = e$ ist. Sei $H_1 = H \cup \{b\}$ und $Y = X(L_1,H_1)$.

Nach Folgerung 8.7. ist dann $A_e(Y) \simeq A_e(X)$. Also ist $c(L_1) = c(L_1,H_1) = c(L,H) = 2$.

10.32. SATZ:

Sei $n \geq 3$. Sei L eine abelsche Gruppe aus $S_{n,1}$ mit $c(L) = 2$, $\exp(L) > 2$ und $\exp(L) \nmid 2n$. Dann ist $c(L \times Z_n) = 2$.

Beweis:

Sei $L_1 = L \times Z_n$ und $b_0 \in L_1 - L$, so daß $b_0^n = e$ ist. Sei $X = X(L,H)$ eine ARR von L aus der Klasse $S_{n,1}$. Da $\exp(L) \nmid 2n$ ist, gibt es ein $g \in L$, so daß $o(g) \nmid 2n$ ist. Sei $b = b_0 g$.

Dann ist $c := b^n = g^n \in L - \{x \in L \mid x^2 = e\}$. Ist $X \in Q_{n,1}$, so sei $H_1 = H \cup bL \cup b^{-1}L - \{b,b^{-1}\}$.

Ist $X \in R_{n,1}$, so sei $H_1 = H \cup \{b,b^{-1}\}$. Sei $Y = X(L_1,H_1)$. Dann bleibt L unter $A_e(Y)$ stabil.

Also bleibt auch die Menge $\{b,b^{-1}\}$ unter $A_e(Y)$ stabil. Ist $\Phi \in A(Y)$, so sei $\Phi_0 = \Phi|_L$.

Dann ist $\Phi_0 \in \{1_L, inv_L\}$. Ist $\Phi(b) = b$, so ist nach Satz 3.16. $\Phi_0(c) = \Phi(c) = c$. Also ist wegen $c^2 \neq e$ $\Phi_0 = 1_L$. Dann ist $\Phi|_{H1} = 1|_{H1}$. Ist $\Phi(b) = b^{-1}$, so ist nach Satz 3.16.: $\Phi_0(c) = \Phi(c) = c^{-1}$. Wegen $c^2 \neq e$ ist dann $\Phi_0 = inv_L$ und $\Phi_{H1} = inv_{H1}$. Also ist $A_e(Y)|_{H1} = Aut_0(L_1)|_{H1}$. Nach Lemma 10.1. ist dann $A_e(Y) = Aut_0(L)$. Also ist $c(L_1) = 2$.

10.33. SATZ:

Sei $n \geq 3$. Sei L eine abelsche Gruppe aus $S_{n,3}$ mit c(L)=2, exp(L)>2 und o(L)≥6.
Dann ist $c(L \times Z_n) = 2$.

Beweis:

Sei $L_1 = L \times Z_n$ und $b \in L_1 - L$, so daß $b^n = e$ ist. Sei X = X(L,H) eine ARR von L aus der Klasse $S_{n,3}$. Sei $g \in L$, so daß $o(g) > 2$ ist.
Da $o(L) \geq 6$ ist, gibt es ein $h \in L-\{e,g,g^{-1},g^2,g^{-2}\}$, so daß $h^2 \neq g$ ist.
Sei $K = \{b,bg,bh\}$. Sei $M = \{e,g,h\}$. Ist $X -\in Q_{n,3}$, so sei $H_1 = H \cup bL \cup b^{-1}L - (K \cup K^{-1})$,
Ist $X \in R_{n,3}$, so sei $H_1 = H \cup K \cup K^{-1}$. Sei $Y = X(L_1,H_1)$. Dann bleibt L unter $A_e(Y)$ stabil.
Ist $\Phi \in A\,(Y)$, so sei $\Phi_1 = \Phi_b|_L$ und $a = b^{-1}\Phi(b)$. Es ist $\Phi(b) \in K \cup K^{-1}$.
Ist $\Phi(b) \in K$, so bleibt K unter $A_e(Y)$ stabil, und es ist $a \in M$ und $a\Phi_1[M] = M$.
1) Ist a = e und Φ_1 = inv, so ist $\{g^{-1},h^{-1}\} = \{g,h\}$.
2) Ist a = g und $\Phi_1 = 1$, so ist $\{g^2,gh\} = \{e,h\}$.
3) Ist a = h und $\Phi_1 = 1$, so ist $\{gh,h^2\} = \{e,g\}$.
4) Ist a = g und Φ_1 = inv, so ist $\{e,gh^{-1}\} = \{e,h\}$.
5) Ist a = h und Φ_1 = inv, so ist $\{hg^{-1},e\} = \{e,g\}$.
In jedem dieser Fälle ergibt sich ein Widerspruch.
Ist also $\Phi(b) \in K$, so ist a = e und Φ_1 =1, was bedeutet, daß $\Phi_b|_L = 1_b|_L$ ist.
Ist $\Phi(b) \in K^{-1}$, so ist inv $\Phi(b) \in K$. Insbesondere ist dann die Menge $\{b,b^{-1}\}$ unter A (Y) stabil. Mit Satz 10.2. folgt nun, daß $A_e(Y) = \{1,inv\}$ ist.

10 34. LEMMA:

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $L = Z_5^n$. Dann ist c(L) = 2.

Beweis:

Ist n = 1, so folgt die Aussage aus Lemma 10.11. Ist n = 2, so folgt die Aussage aus Lemma 10.19. Sei $L_n = Z_5^n$. Für ein $n \geq 2$ sei $c(L_n) = 2$.
Da $o(L_n) = 5^n > 12$ ist, ist $L \in S_{5,3}$ nach Lemma 10.30.
Nach Satz 10.33. ist dann $c(L_{n+1})=2$, da $L_{n+1} = L_n \times Z_5$ ist. Also ist $c(L_n)=2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

10.35. LEMMA:

Sei $n \geq 3$ und $L = Z_4^n$. Dann ist $c(L) = 2$.

Beweis:

Sei $L = Z_4^n$. Ist $n = 3$, so ist $c(L_3) = 2$ nach Lemma 10.24. Für ein $n > 3$ sei $c(L_N) = 2$. Da $o(L_n) = 4^n > 12$ ist, ist $L_n \in S_{4,3}$ nach Lemma 10.30. Es ist $L_{n+1} = L_n \times Z_4$. Nach Satz 10.33. ist dann $c(L_{n+1}) = 2$. Also ist $c(L_n) = 2$ für alle $n \geq 3$.

10.36. LEMMA:

Sei $n \geq 4$ und $L = Z_3^n$. Dann ist $c(L) = 2$.

Beweis:

Sei $L_n = Z_3^n$. Ist $n = 4$, so ist $c(L_4) = 2$ nach Lemma 10.2. Für ein $n > 4$ sei $c(L_n) = 2$. Da $o(L_n) = 3^n \geq 81 > 30$ ist, ist $L_n \in S_{3,3}$ nach Lemma 10.30. Es ist $L_{n+1} = L_n \times Z_3$. Nach Satz 10.33. ist dann $c(L_{n+1}) = 2$. Also ist $c(L_n) = 2$ für alle $n \geq 4$,

10.37. SATZ: [Im-Wa 2, Theorem 1]

Sei L eine abelsche Gruppe mit $\exp(L) > 2$.

Ist dann L keine der Gruppen $Z_4 \times Z_2$, Z_3^2, Z_4^2, $Z_4 \times Z_2^2$, Z_3^3, so ist $c(L) = 2$.

Beweis:

Sei L keine der Gruppen $Z_4 \times Z_2$, Z_3^2, Z_4^2, $Z_4 \times Z_2^2$, Z_3^3. Sei $L = (m_1,....,m_r)$ die Standardrepräsentation der Gruppe L. Da $\exp(L) > 2$ ist, ist $m_1 \geq 3$.

A) Ist $r = 1$, so ist $c(L) = 2$ nach Lemma 10.11. B) Sei $r \geq 2$.

1) Ist $m_1 = 3$, so ist $r \geq 4$. Dann ist $c(L) = 2$ nach Lemma 10.36.

2) Ist $m_1 = 4$, so ist $r \geq 3$. Sei dann $L_0 = (m_1,m_2,m_3)$.

a) Ist $L_0 = Z_4^3$, so ist $c(L_0) = 2$ nach Lemma 10.24. Da $L_0 \in \underline{S}_{2,1} \cap \underline{S}_{4,3}$ ist, folgt durch (mehrfache) Anwendung von Satz 10.31. bzw. 10.33., daß $c(L) = 2$ ist.

b) Ist $L_0 = Z_4^2 \times Z_2$, so ist $c(L_0) = 2$ nach Lemma 10.23. Da $L_0 \in \underline{S}_{2,1}$ ist, folgt durch (mehrfache) Anwendung von Satz 10.31., daß $c(L) = 2$ ist.

c) Ist $L_0 = Z_4 \times Z_2^2$, so ist $r \geq 4$. Sei dann $L_1 = (m_1,m_2,m_3,m_4) = Z_4 \times Z_2^3$. Dann ist $c(L_1) = 2$ nach Lemma 10.22. Da $L_0 \in \underline{S}_{2,1}$ ist, folgt durch (mehrfache) Anwendung von Satz 10.31., daß $c(L) = 2$ ist.

3) Ist $m_1 = 5$, so ist $c(L) = 2$ nach Lemma 10.34.

4) Ist $m_1 \geq 6$, so sei $1 \leq p \leq r$ so gewählt, daß $m_p \geq 3$ und $m_{p+1} = 2$ oder $p = r$ ist. Sei $L_1 = (m_1,...,m_p)$. Dann ist $c(L_1) = 2$ nach Satz 10.27. Ist $L = L_0$, so ist $c(L) = 2$. Ist $L \neq L_0$ und $o(L_0) \geq 8$, so ist $L_0 \in \underline{S}_{2,1}$. Dann folgt durch mehrfache Anwendung von

Satz 10.31., daß $c(L) = 2$ ist. Ist $L \neq L_0$ und $o(L_0) < 8$, so ist $L = Z_6 \times Z_2^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Sei dann $L_1 = Z_6 \times Z_2$. Dann ist $o(L_1) = 2$ nach Lemma 10.12. und $L_1 \in \underline{S}_{2,1}$ nach Lemma 10.30. Durch mehrfache Anwendung von Satz 10.31. folgt dann, daß $c(L) = 2$ ist.

11. Der Cayleyindex der GDC-Gruppen

In diesem Kapitel wurden vorerst die umfangreichen Beweise ausgelassen.

A) Die GQ-Gruppen

11.1. LEMMA: [Im-Wa 2, Lemma 2.6]

$G = Q = DC(4) = \langle a,b \mid a^4 = e, b^2 = a^2, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$, $H = \{a,a^{-1})$.

⇨ $c(G) = c(G,H) = 16$, $a(G) = a(G,H) = 8$.

11.2. LEMMA:

$G = GDC(4,2)= \langle a,b,c \mid a^4 = c^2 = e, b^2 = a^2, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$, $H = \{a,a^{-1},b,b^{-1},c,a^2\}$,

⇨ $c(G) = c(G,H) = 16$, $a(G) = a(G,H) = 8$.

11.3. LEMMA:

$G = GDG(4,2,2) = \langle a,b,c,d \mid a^4 = c^2 = d^2 =e, b^2 = a^2, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$,

$H=\{a,b,ab,ac,bc,bcd,c,d\}^{\pm 1}$. ⇨ $c(G) = a(G) = c(G,H) = 4$.

11.4. LEMMA:

Sei $G = Q \times Z_2^n$. Ist $n \geq 2$, so ist $c(G) = a_0(G) = 4$.

B.) Die GDC-Gruppen, die keine GQ-Gruppensind

11.5. LEMMA: [Im-Wa 2, Theorem 2]

Sei G eine GDC-Gruppe der abelschen Gruppe L, aber keine GQ-Gruppe.

Ist dann $L \in S_{2,6}$, $c(L) = 2$ und $o(L) \geq 16$, so ist $c(G) = 2$.

11.6. LEMMA:

Sei $G = DC(2n) = \langle a,b \mid a^{2n}=e,b^2=a^n,b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$ und $H = \{a,a^{-1},b,b^{-1},ba,b^{-1}a,ba^3,b^{-1}b^3\}$.

Ist $n \geq 6$, so ist. $c(G,H) = 2$.

11.7. LEMMA:

Sei $G_n = GDC(2n,2) = \langle a,b \mid a^{2n}= b^4=e, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$

und $H = \{a,a^{-1},b,b^{-1},ba,b^{-1}a,ba^3,b^{-1}b^3\}$. Ist $n \geq 3$, so ist $c(G_n,H) = 2$.

11.8. LEMMA:

$G = DC(6) = \langle a,b \mid a^3 = b^4 = e, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$, $H = [a,a^{-1},b,b^{-1}\}$ ⇨ $c(G) = a(G) = c(G,H) = 4$.

11.9. LEMMA:

$G = GDC(4,2) = \langle a,b \mid a^4 = b^4 = e, b^{-1}ab= a^{-1}\rangle$, $H = [a,a^{-1},b,b^{-1},ba,b^{-1}a\}$

$\Rightarrow c(G) = a(G) = c(G,H) = 4.$

11.10 LEMMA:

$G = DC(8) = \langle a,b \mid a^8 = e,\ b^2 = a^4,\ b^{-1}ab = a^{-1}\rangle,\ H = \{a,a^{-1},b,b^{-1}).$

$\Rightarrow c(G) = a(G) = c(G,H) = 4.$

11.11. LEMMA:

$G = DC(10) = \langle a,b \mid a^5 = b^4 = e,\ b^{-1}ab = a^{-1}\rangle,\ H = \{a,a^{-1},b,b^{-1}).$ $\Rightarrow c(G) = a(G) = c(G,H) = 4.$

11.12. LEMMA:

$G = GDC(6,2) = \langle a,b \mid a^6 = b^4 = e,\ b^{-1}ab = a^{-1}\rangle,\ H = [a,a^{-1},b,b^{-1},ba,b^{-1}a,ba^3,b^{-1}a^3\}.$

$\Rightarrow c(G) = c(G,H) = 2.$

11.13. LEMMA:

$G = GDC(8,\underline{2}) = \langle a,b \mid a^8 = b^4 = e,\ b^{-1}ab = a^{-1}\rangle,\ H = \{a,a^{1},b,b^{-1},ba,b^{-1}a,ba^3,b^{-1}a^3\}.$

$\Rightarrow c(G) = c(G,H) = 2.$

11.14. LEMMA:

$G = .GDC(\underline{8},2) = \langle a,b,c \mid a^8 = c^2 = e,\ b^2 = a^4,\ b^{-1}ab = a^{-1}\rangle,$

$H = \{a,a^{1},b,b^{-1},ba,b^{-1}a,bc,\ b^{-1}c,c\}.$ $\Rightarrow c(G) = c(G,H) = 2.$

11.15. LEMMA:

$G = GDC(4,4) = \langle a,c,b \mid a^4 = c^4 = e,\ b^2 = a^2,\ b^{-1}ab = a^{-1},\ b^{-1}cb = c^{-1}\rangle,$

$H = \{a,c,ac,b,ba,bc,c^2\}^{\pm 1}.$ $\Rightarrow c(G) = c(G,H) = 2.$

11.16. LEMMA:

$G = GDC(4,\underline{2},2) = \langle a,b,c \mid a^4 = b^4 = c^2 = e,\ b^{-1}ab = a^{-1}\rangle,$

$H = \{a,a^{-1},b,b^{-1},ba,b^{-1}a,bc,b^{-1}c,c\}.$ $\Rightarrow c(G) = c(G,H) = 2.$

11.17. LEMMA:

$G = GDC(6,3) = (a,c,b \mid a^3 = c^3 = b^4 = e,\ b^{-1}ab = a^{-1}, b^{-1}cb = c^{-1}\rangle,$

$H = \{a,a^{-1},cb^2,c^{-1}b^2,b,b^{-1},ba,b^{-1}a,bc,b^{-1}c\}.$ $\Rightarrow c(G) = c(G,H) = 2.$

11.18. SATZ:

Sei G eine GDC-Gruppe, aber keine GQ-Gruppe. Ist dann G keine der Gruppen (12.5) =DC(6), (16.14) = DC(8),

(16.10) = GDC(4,2), (20.5) = DC(10), so ist c(G) = 2.

IV. Untersuchung der Erw. der abelschen und GDC-Gruppen

12. Erweiterungen der abelschen Gruppen

In diesem Kapitel wurden vorerst die umfangreichen Beweise ausgelassen.

A) Erweiterungen mit Z_2

12.1. LEMMA:

Sei L eine abelsche Gruppe mit exp(L) > 2 und X = X(L,H) eine ARR von L. Sei G eine Erweiterung von L durch Z_2 und Y = X(G,H_1), so daß $H_1 \cap G = H$ ist und L unter $A_e(Y)$ stabil bleibt. Sei $b \in G\text{-}L$ und $K = bL \cap H_1$, $K' = bL - H_1$. Sei $M \in \{b^{-1}K, b^{-1}K'\}$, so daß $e \in M$ ist. Genau dann ist Y eine GRR von G, wenn gilt

i) $a M \neq M$ für alle $a \in M - \{e\}$. ii) $aM^{-1} \neq M$ für alle $a \in M$.

12.2. Definition:

Sei L eine abelsche Gruppe mit exp(L) > 2. Sei G eine Erweiterung von G durch die Gruppe Z_2. Ist $b \in G - L$, so sei $\{c,\beta\}$ das zu b gehörende Parametersystem.

a) Die Erweiterung G von L sei vom **Typ A,** wenn es ein $b \in G - L$ mit $b^2 = e$ und Elemente $h_1, h_2 \in L$ gibt, so daß gilt:

 i) $o(h_1) > 2$ ii) $\beta(h_i) \neq h_i^{-1}$ (i =1,2). iii) $h_i \neq h_j, h_j^{-1}, h_j^2$ ($\{i,j\} = \{1,2\}$, $i \neq j$)

b) Die Erweiterung G von L sei vom **Typ B**, wenn es ein $b \in G - L$ mit $b^2 = e$ und ein $h \in L$ gibt, so daß gilt: i) $o(h) > 2$ ii) $\beta(h) \neq h$ iii) $\beta(h) \neq h^{-1}$

c) Die Erweiterung G von L durch Z_2 sei vom **Typ C**, wenn G kein semidirektes Produkt von G mit Z_2 ist, und es ein Element $b \in G - L$ mit $o(b)>4$ und ein $g \in L$ gibt, so daß gilt:

 i) $g^2 \neq c^{-1}$ ii) $\beta(g) \neq g$ iii) $\beta(g) \neq g^{-1}$ iv) $\beta(g)g \neq c^{-2}$

d) Die Erweiterung G von L durch Z_2 ist vom **Typ D**, wenn G kein semidirektes Produkt von G mit Z_2 ist, und es ein $b \in G - L$ mit $o(b) = 4$ und ein $g \in L$ gibt, so daß gilt:

 i) $g \neq e$ iv) $\beta(g) \neq g^{-1}$

 ii) $g^2 \neq c$ v) $\beta(g) \neq gc$

 iii) $\beta(g) \neq g$

e) Die Erweiterung G von L durch Z_2 ist vom **Typ E**, wenn G kein semidirektes Produkt von G mit Z_2 ist, und es ein $b \in G\text{-}L$ mit $o(b)>4$ und zwei-Elemente $g, h \in L$ gibt, so daß gilt:

 i) $o(g) > 2$ iv) $h \neq g, g^{-1}, g^2$

 ii) $\beta(g) = g^{-1}$ v) $g \neq h^2$

 iii) $\beta(h) = h^{-1}$

Um eine GRR der Gruppe G zu konstruieren, werden wir von einer ARR der Gruppe L aus der Klasse $Q_{\underline{2,k}}$ ausgehen und eine passende invers abgeschlossene Menge $K \subset G - L$ wählen, wobei $k = |K|$ ist. Wir zeigen dann, daß der Cayley-Graph $Y = X(G, H \cup K)$ eine GRR von G ist. Zunächst folgt, daß L unter $A_e(Y)$ stabil bleibt. Dann bleibt auch K unter A_e (Y) stabil. Sei $x \in L$ und-seien $b, bx \in K$.

Sei $\Phi \in A_e(Y)$ und $\Phi_1 = \Phi_b|_L$.

Ist $\Phi(b) = bx$ und $\Phi_1 = 1$, so ist $b^{-1}\Phi[K] - \{x\} = b^{-1}K - \{x\}$. (*)

Ist $\Phi(b) = bx$ und $\Phi_1 = inv$, so ist $b^{-1}\Phi[K] - \{e,x\} = b^{-1}K - \{ e,x\}$. (**)

Um zu zeigen, daß Y eine GRR von G ist, genügt es, zu zeigen, daß keine der Bedingungen (*) und (**) erfüllt ist außer der Bedingung für $\Phi(b) = b$, $\Phi_1 =1$.

12.3. LEMMA:

Sei L eine abelsche Gruppe aus $\underline{S}_{2,3}$ mit $\exp(L) > 2$ und $c(L) =2$. Sei G semidirektes Produkt von L mit Z_2. Sei $b \in G - L$, so daß $b^2 = e$ ist. Seien $h_1,h_2 \in L$, so daß die Menge $K = \{b, bh_1, bh_2\}$ invers abgeschlossen ist. Gilt dann:

1) $\{b_1^2,h_1h_2\} \neq \{e, h_2\}$

2) $\{h_2^2,h_1h_2\} \neq \{e, h_1\}$

3) $\{h_1^{-1},h_2^{-1}\} \neq \{h_1,h_2\}$

4) $h_1h_2^{-1} \neq h_2$

5} $h_1^{-1}h_2 \neq h_1$

so ist $c(G) = 1$.

12.4. LEMMA:

Sei L eine abelsche Gruppe aus $\underline{S}_{2,3}$ mit $\exp(L)> 2$ und $c(L) = 2$. Sei G eine Erweiterung des Typs A von L. Dann ist $c(G) = 1$.

12.5. LEMMA:

Sei L eine abelsche Gruppe aus $\underline{S}_{2,3}$ mit $\exp(L) > 2$ und $c(L) = 2$. Sei G eine Erweiterung des Typs B von L. Dann ist $c(G) = 1$.

12.6 LEMMA:

Sei L eine abelsche Gruppe aus $\underline{S}_{2,4}$ mit $\exp(L) > 2$ und $c(L) = 2$. Sei G Erweiterung von L durch die Gruppe Z_2. Es gebe ein $b \in G - L$ mit $b^2 \neq e$. Sei $\{c,\beta]$ das zu b gehörende Parametersystem. Sei $g \in L$, so daß $\beta(g) \neq g^{-1}c^{-1}$ ist. Ist dann:

1) $\{gc^{-1},g^2, g\beta(g^{-1})c^{-1}\} \neq \{e,c^{-1},\beta(g^{-1})c^{-1}\} = T_1$

2) $\{\beta(g^{-1})c^{-2}, g\beta(g^{-1})c^{-1},\beta(g^{-2})c^{-2}\} \neq \{e,c^{-1},g\} = T_2$

3) $\{c^{-2}, gc^{-1}, \beta(g^{-1})c^{-2}\} \neq \{e,g, \beta(g^{-1})c^{-1}\} = T_3$

4) $\{c,g^{-1}, \beta(g)c\} \neq \{c^{-1},g,\beta(g^{-1})c^{-1}\} = T_4$

5) $\{gc, g\beta(g)c\} \neq \{c^{-1},\beta(g^{-1})c^{-1}\} = T_5$

6) $\{\beta(g^{-1}),g^{-1}\beta(g^{-1})c^{-1}\} \neq \{c^{-1},g\} = T_6$

7) $\{g^{-1}c^{-1},\beta(g)\} \neq \{g,\beta(g^{-1})c^{-1}\} = T_7$

so ist $c(G) = 1$.

12.7. LEMMA:

Sei L eine abelsche Gruppe aus $\underline{S}_{2,4}$ mit $\exp(L) > 2$ und $c(L) = 2$. Sei G eine Erweiterung des Typs C von L. Dann ist $c(G) = 1$.

12.8. LEMMA:

Sei L eine abelsche Gruppe.aus $\underline{S}_{2,4}$ mit $\exp(L) > 2$ und $c(L) = 2$. Sei G eine Erweiterung des Typs D von L. Dann ist $c(G) = 1$.

12.9. LEMMA:

Sei L eine abelsche Gruppe aus $\underline{S}_{2,6}$ mit $\exp(L) > 2$ und $c(L) = 2$. Sei G Erweiterung von L durch die Gruppe Z_2, aber kein semidirektes Produkt von L mit Z_2. Sei $b \in G - L$ und $\{c,\beta\}$ das zu b gehörende Parametersystem.

Sei $g \in L - \{e,c^{-1}\}$ und $h \in L - \{e, c^{-1}, g, \beta(g^{-1})c^{-1}\}$.

Gilt dann.:

1) $\{gc^{-1},g^2,g\beta(g^{-1})c^{-1},gh,g\beta(h^{-1})c^{-1}\} \neq \{e,c^{-1},\beta(g^{-1})c^{-1},h,\beta(h^{-1})c^{-1}\}$

2) $\{hc^{-1},h^2,h\beta(h^{-1})c^{-1},gh,h\beta(g^{-1})c^{-1}\} \neq \{e,c^{-1},g,\beta(g^{-1}\}c^{-1},\beta(h^{-1})c^{-1}\}$

3) $\{c^{-2},gc^{-1},\beta(g^{-1})c^{-2},hc^{-1},\beta(h^{\,1})c^{-2}\} \neq \{e,g,\beta(g^{-1})c^{-1},h,\beta(h^{-1})c^{-1}\}$

4) $\{\beta(g^{-1})c^{-2},g\beta(g^{-1})c^{-1},\beta(g^{-2})c^{-2},h\beta(g^{-1})c^{-1},\beta(g^{-1}h^{-1})c^{-2}\} \neq \{e,c^{-1},g,h,\beta(h^{-1})c^{-1}\}$

5) $\{\beta(h^{-1})c^{-2},h\beta(h^{-1})c^{-1},\beta(h^{-2})c^{-2},g\beta(h^{-1})c^{-1},\beta(g^{-1}h^{-1})c^{-2}\} \neq \{e,c^{-1},g,\beta(g^{-1})c^{-1},h\}$

6) $\{c,g^{-1},\beta(g)c,h^{-1},\beta(h)c\} \neq \{c^{-1},g,\beta(g^{-1})c^{-1},h,\beta(h^{-1})c^{-1}\}$

7) $\{gc,g\beta(g)c,gh,g\beta(h)c\} \neq \{c,\beta(g)c,h,\beta(h)c\}$

8) $\{hc,h\beta(h)c,gh,h\beta(g)c\} \neq \{c,g,\beta(g^{-1})c,\beta(h)c\}$

9) $\{gc^{-1},\beta(g),hc^{-1},\beta(h)\} \neq \{g,\beta(g^{-1})c,h,\beta(h^{-1})c\}$

10) $\{\beta(g^{\,1}),g^{\,1}\beta(g^{\,1})c^{\,1},h^{\,1}\beta(g^{\,1}),c,\beta(g^{\,1}h)\} \neq \{c,g,h,\beta(h^{\,1})c^{\,1},..\}$

11) $\{\beta(h^{\,1}),h\beta(h^{\,1})c^{\,1},g\beta(h^{\,1})c^{\,1},\beta(gh^{\,1})\} \neq \{c,g,\beta(g^{\,1})c^{\,1},..\}$

so ist $c(G) = 1$.

12.10. LEMMA:

Sei L eine abelsche Gruppe mit exp(L) > 2 und c(L) = 2. Sei G eine Erweiterung des Typs E von L aus $S_{2,6}$. Dann ist c(G) = 1.

12.11. LEMMA:

Sei L eine abelsche Gruppe mit exp(L) > 2. Sei $\beta \in Aut(L) - \{1, inv\}$ so daß $\beta^2 = 1$ ist. Für alle $x \in L$ mit $o(x) > 2$ sei $\beta(x) \in \{x, x^{-1}\}$. Dann gibt es ein $n \in IN$, so daß gilt:

$L = Z_4 \times Z_2^{n+1} = \langle a, c \mid a^4 = c^2 = e\rangle \times Z_2^n$ und $\beta(a) = a^{-1}$ $\beta(c) = a^2c$, sonst $\beta(x) = x$ für alle $x \in Z_2^n$.

12.12. LEMMA:

Sei L eine abelsche Gruppe mit exp(L) > 2. Sei G ein nichtabelsches semidirektes Produkt von L mit Z_g. Ist dann G keine Erweiterung des Typs A oder B von L, so ist

i) $L = Z_p$ und G = DH(p) mit $3 \leq p \leq 5$

ii) $L = Z_4 \times Z_2$ und G = (16.8) = GDCH(4).

12.13. LEMMA:

Sei L eine abelsche Gruppe mit exp(L) > 2. Die nichtabelsche Gruppe G sei Erweiterung von L durch-Z_2. Es gebe ein $b \in G - L$ mit o(b)   8, aber G sei keine Erweiterung des Typs C Dann ist o(b) = 12 und es gibt ein n € IN_0, so daß gilt:

$L = Z_{12} \times Z_2^n$ und $G = Q \times Z_3 \times Z_2^n$

12.14. LEMMA:

Sei L eine abelsche Gruppe mit exp(L) > 2. Die nichtabelsche Gruppe G sei Erweiterung von L durch Z2. Es gebe ein $b \in G - L$ mit o(b) = 8, aber G sei keine Erweiterung des Typs C. Dann gibt es eine Untergruppe U von L, so daß gilt:

$L:U = 2$, $\beta|_U = inv|_U$, $L = \langle U, b^2\rangle$.

12.15. LEMMA:

Sei L eine abelsche Gruppe mit exp(L) > 2. Sei G eine nichtabelsche Erweiterung von L durch Z_2, aber kein semidirektes Produkt von L mit Z_2. Es gebe ein $b \in G\text{-}L$ mit o(B)>4. Ist dann G keine Erweiterung des Typs C oder E von L, so ist:

i) $L = Z_{12}$ und G = (24.7) = $Q \times Z_3$ oder

ii) $L = Z_4 \times Z_2$ und G = (16.11) = SPC(8,2;5)

12.16. LEMMA:

Sei L eine abelsche Gruppe mit exp(L) > 2. Die nichtabelsche, nicht verallgemeinert dizyklische Gruppe G sei Erweiterung von L durch Z_2. Für alle b ∊ G - L gelte o(b) = 4. Ist dann G keine Erweiterung des Typs D von L, so ist für ein n ∊ IN:

i) L = $Z_4 \times Z_2^{n+2}$ und G = (32.16) x Z_2^n oder

ii) L = $Z_4^2 \times Z_2^n$ und G = (32.15) x Z_2^n oder

iii) L = $Z_4^2 \times Z_2$ und G = (64.a) x Z_2^{n-4}.

13. Erweiterungen der GDC-Gruppen

13.1. SATZ:

Sei G eine endliche GDC-Gruppe und G_1 eine Erweiterung von G durch die Gruppe Z_p, wobei p eine Primzahl und G_1 keine GDC-Gruppe ist. Gibt es dann keine Untergruppen L und U von G_1, so daß gilt:

i) L ist eine abelsche Gruppe.

ii) U ist keine GDC-Gruppe

iii) $L \lhd U \lhd G_1$, $G_1 : U = 2$, $U : L = p$

so gilt eine der folgenden Aussagen:

A) G_1 ist Erweiterung einer abelschen Untergruppe L vom Index 2 in G mit der zyklischen Gruppe Z_{14}, wobei gilt: $G_1 = \langle L, d\rangle$- $d^4 \in L$, $d^8 = e$, $d^{-2}xd^2 = x^{-1}$ $(x \in L)$.

B) Es ist $G = Q \times Z_2^n$ $(n \in IN)$ und $G_1 = \langle a,b,c_1,c_2,...,c_n,d\rangle$ mit $a^4 = c_i^2 = d^3 = e$, $b^2 = a^2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $d^{-1}ad = b$, $d^{-1}bd = ab$, $d^{-1}c_id \in \langle a^2,c_1,....,c_n\rangle$.

Beweis:

Sei L eine abelsche Untergruppe von G, so daß G GDC-Gruppe von L ist. Sei $b \in G - L$.

A) Es gebe ein $d \in G_1 - G$, so daß $d^{-1}Ld = L$ ist. Sei $\delta(x) = d^{-1}x$.

1) Ist $d^p \in L$, so sei $U = \langle L,d\rangle$. Dann ist $L \lhd U$ und $U : L= p$. Weiter ist $d^{-1}bd = bx \in bL$. Also ist $b^{-1}db = dx^{-1} \in U$. Dann ist $U \lhd G_1$ und $G_1 : U = 2$. Ist U eine GDC-Gruppe, so sei $s = db$ und $V = \langle L,s\rangle$. Wir behandeln nun die nach Lemma 6.19. möglichen Fälle:

i) Es ist p=2 und $\delta = inv|_L$. Dann ist V eine abelsche Gruppe und es gilt G_1:V=V:L= 2.

ii) Es ist p ≠= 2 und $\delta = inv|_L$. Dann ist V eine abelsche Gruppe und G_1:V = 2, V:L=4.

iii) U habe die in Fall c) von Lemma 6.19 beschriebene Struktur. Dann ist V keine GDC-Gruppe und $G_1 : V = V : L= 2$.

2) Ist $d^p \notin bL$, so ist $G_1 = \langle L,d\rangle$, $L \lhd G_1$ und $G_1: L =2p$.

i) Ist p. = 2, so ist G_1 Erweiterung der Gruppe L durch die Gruppe Z_4 mit den in Aussage A) des Satzes angegebenen Eigenschaften.

ii) Ist p > 2, so sei $s = d^2$ und $U = \langle L,s\rangle$.

Dann ist U keine GDC-Gruppe, $L \lhd U$, $U : L = p$ und $G_1 : U = 2$.

B) Es gebe kein $d \in G_1 - G$, so daß $d^{-1}Ld = L$ ist. Dann ist $L=Z_4 \times Z_2^n$ und $G = DC(4) \times Z_2^n$. Sei $L_0 = Z_2^n$. Die drei Gruppen $\langle L_0, a\rangle$, $\langle L_0, b\rangle$ und $\langle L_0, ab\rangle$ sind Untergruppen vom Index 2 in G und G ist GDC-Gruppe jeder dieser Gruppen. Man kann nun o.B.d.A. annehmen, daß keine dieser Gruppen unter δ stabil bleibt. Dann ist $p = o(\delta) = 3$. Dann hat G_1 die in Aussage B) des Satzes angegebenen Eigenschaften.

13.2 LEMMA:

Sei L eine abelsche Gruppe mit exp(L)> 2 und. o(L) > 8. Sei G = <L,b> eine Erweiterung der Gruppe L durch die Gruppe Z_1 mit den. Eigenschaften:
$b^8 = e$ und $b^{-2}xb^2 = x^{-1}$ für alle $x \in L$. Dann ist c(G) = 1.

Beweis:

I) Sei c(L) = 2 und $L \in S_{4,3}$. Sei β der von b auf L induzierte Automorphismus. Dann ist β^2 = inv. Sei $g \in L$, so daß $\beta^2(g) \neq e$ ist. Dann ist $\beta(g) \in \{g,g^{-1}\}$ und $\beta^2(g) \neq g$. Sei N. = $[e, g, g^2, \beta(g), g^{-1}, g^{-2}, \beta(g^{-1})\}$. Dann ist $|N| < 7$. Also ist L - N nicht leer. Sei $h \in L - N$, so daß $h^2 \neq g$ ist. Es ist nun $\beta^{-1}(g) = \beta\beta^2(g) = \beta(g^{-1}) \in N$. Man rechnet nun leicht nach, daß jede der Bedingungen 1) - 11) von Lemma 12.23. erfüllt ist. Also ist c(G) = 1 nach Lemma 12.23.

II) Sei c(L) > 2 oder $L \notin S_{4,3}$. Ist c(L) > 2, so ist nach Satz 10.32. unter Berücksichtigung von 2|o(L) L eine der Gruppen: (16.2) = $Z_4 \times Z_2^2$ und (16. 3) = Z_4^2.
Da o(L) > 8 ist, folgt aus Satz 7.17 und Tabelle 1**,** daß $L \in \underline{S}_{4,3}$ ist. Sei β der von b auf L induzierte Automorphismus. Dann ist β^2= inv.

a) Sei $L = Z_4 \times Z_2^2 = \langle a,c_1,c_2 \mid a^4=c_1^2=c_2^2=e\rangle$.
Dann kann man o.B.d.A. annehmen, daß $b^4 \in \{a^2,c_1\}$ ist. Ferner kann man o.B.d.A. annehmen, daß $\beta(a) = ac_2$ und $\beta(c_2) = ac_2$ ist. Dann ist $\beta(c_1) \in \{c_{1/}|,a^2c_1\}$. Man kann o.B.d.A. annehmen, daß $\beta(c_1) = c_1$ ist. Also ist G_1 eine der Gruppen
(64.f) = $\langle a,c_2,d \mid a^4 = c_2^2= e, d^4=a^2,d^{-1}ad=ac_2,d^{-1}c_2d=a^2c_2\rangle \times Z_2$ =32.48) x Z_2
(64.d) = $\langle a,c_2,d \mid a^4=c_2^2=d^8=e,d^{-1}ad=ac_2,d^{-1}c_2d=a^2c_2\ 1\rangle$
Ist G_1 = (64.f), so ist $c(G_1)$ = 1, da c((32.48)) = 1 ist nach Lemma 15.15**.**
Ist G_1 = (64.d), so ist c(G1) = 1 nach Lemma 15.15.

b) Sei $G=Z_4^2=\langle a_1,a_2 \mid a_1^4=a_2^4 = e\rangle$. Dann ist G_1=(64.e) und $c(G_1)$=1 nach Lemma 15.16**.**

13.3. LEMMA

Sei $G = Q \times Z_2^n = \langle a,b,c_i \mid a^4 =c_i^2 =e,b^2 =a^2,b^{-1}ab=a^{-1}\ (1 \le i \le n)\rangle$ für ein $n \in IN$.
Sei G_1 = <G,d> Erweiterung der Gruppe G durch Z_3 mit den Eigenschaften:
$d^3 = e$, d ad = b, $d^{-1}bd = ab$, $d^{-1}c_id \in \langle a^2,c_1,...,c_n\rangle\ (1 \le i \le n)\rangle$. Dann ist c(G1) = 1.

Beweis:

1) Ist n = 0, so ist G_1 = <a,b,d | $a^4 = d^3 = e$; $b^2=a^2, b^{-1}ab=a^{-1}$, $d^{-1}ad=b, d^{-1}$'bd=ab> = (24.12)..
Dann ist c(G1) = 1 nach Lemma 14.19.

2) Ist n = 1, so ist $d^{-1}c_1d = c_1$. Also ist G_1 = (24.12) x Z_2. Da c((24.12)) = 1 ist, ist $c(G_1) = 1$ nach Satz 9.11.

3) Sei n ≥ 2. Da o(G)≥32 ist, ist G ∊ $S_{3.3}$ nach Satz 7.17. Nach Lemma 11.4**.** ist $c(G) = a_0(G) = 4$. Sei X = X(G,H) eine MRR von G aus der Klasse $R_{3.3}$.
Sei K = {d,da,db} und Y = X(G_1,H ∪ K ∪ K^{-1}).
Es ist $A_e(X)$ = Aut(G,H) = $\mathrm{Aut}_0(G)$ = {1,β_1,β_2,β_3], wobei gilt:
$\beta_1(a) = a^{-1}$ $\beta_1(b) = b$ $\beta_1(c_i) = c_i$
$\beta_2(a) = a$ $\beta_2(b) = b^{-1}$ $\beta_2((c_i) = c_i$ $\beta_3 = \beta_1\,\beta_2$
Es ist ferner:
$N(d,G) = N(d^{-1}ab^{-1},G) = \{e,a^{-1},ab^{-1}\}$ $N(d^{-1},G) = N(db,G) = \{e,a,b\}$
$N(da,G) = N(d^{-1}a^{-1},G) = \{e,b^{-1},ab\}$
Sei Φ∊ $A_e(X)$ und definiert $\Phi_0 = \Phi|_G$, $\Phi_1 = \Phi_b|_G$. Für alle x ∊ G_1 ist nun $N(\Phi(x),G) = \Phi_0[N(x,G)]$. Mit x=d folgt daraus, daß $\Phi_0 = \underline{1}$ und $\Phi(d) = \{d,d^{-1},ab^{-1}\}$ ist.
Weiter ist Φ(db) ∊ $\{db,d^{-1}\}$. Ist $\Phi(d) = d^{-1}ab^{-1}$, so ist $\Phi(db) = d^{-1}ab^{-1}\Phi_1(b)$∊ $\{d^{-1}a,d^{-1}a^{-1}\}$, was nicht möglich ist. Also ist Φ(d) = d für alle Φ ∊ $A_e(Y)$. Also bleibt die Menge M = G ∪ {d} unter $A_e(Y)$ fest. Da G_1 = <M> ist, ist Y eine GRR von G_1.

13.4. SATZ:

Sei G eine GDC-Gruppe und G_1 eine Erweiterung von G durch die Gruppe Z_p, wobei p eine Primzahl ist. Ist dann G_1 keine GDC-Gruppe und $o(G_1) > 32$, so ist $c(G_1) = 1$.

Beweis:

I) Es gebe Untergruppen L und U von G_1, so daß L eine abelsche Gruppe, U keine GDC-Gruppe und L ⊲ U ⊲ G_1, G_1 : U = 2, U : L = p ist. Dann ist o(U)>16.

a) Ist U eine, abelsche Gruppe, so ist $c(G_1) = 1$ nach Satz 12.35.

b) Ist U eine nichtabelsche Gruppe und o(U)>32, so ist c(U) = 1 nach Satz 12.35. Dann ist $c(G_1) = 1$ nach Satz 9.11.

c) Ist U eine nichtabelsche Gruppe und o(U)≤32, c(U)=1, so ist $c(G_1)=1$ nach Satz 9.11.

d) Ist U eine nichtabelsche Gruppe,o(U)≤32 und c(U)≥2, so ist $c(G_1)=1$ nach Satz 16.25.

II) Es gebe keine Untergruppen L und U mit den oben genannten Eigenschaften. Dann gilt eine der Aussagen A) oder B) von Satz 13.1. Gilt Aussage A),so ist $c(G_1) = 1$ nach Lemma 13.2. Gilt Aussage B),so ist $c(G_1) = 1$ nach Lemma 13.3.

V. DER CAYLEYINDEX EINIGER "KLEINER" GRUPPEN

14. Der Cayleyindex der nichtabelschen, nicht-GDC-Gruppen, deren Ordnung ≤ 32 ist.

(mit gegenüber dem Original verkürzten Beweisen)

14.1. LEMMA:

G = (6.2) = DH(3) = $\langle a,d | a^6 = d^2 = e, dad = a^{-1}\rangle$, H ={d,da }.⇨ c(G) = a(G) = c(G,H) = 2.

Beweis:

Sei X = X(G,H). Dann ist X ein Kreis mit 6 Ecken. Also ist c(G,H) = 2

14.2. LEMMA: [Im-Wa 2, Lemma 2.3]

G = (8.4) =DH(4) =$\langle a,d (a^4 = d^2 = e, dad = a^{-1}\rangle$, H = {d,da}.⇨ c(G) = a(G) = c(G,E) = 2.

Beweis:

Der Graph X = X(G,H) ist ein Kreis mit 8 Ecken. Also ist c(G) = c(G,H) = 2.

14.3. LEMMA:

G = (10.2) = DH(5)=$\langle a,d | a^5 = d^2 = e, dad = a^{-1}\rangle$, H = {d,da}.⇨ c(G) = a(G) = c(G,H) =2.

Beweis:

Der Graph X = X(G,H) ist ein Kreis mit 10 Ecken. Also ist c(G) = c(G,H) = 2.

14.4. LEMMA:

G = (12.3) = DH(6).= $\langle a,d | a^6 = d^2 = e, dad = a^{-1}\rangle$, H = $\{a,a^{-1},d,da,da^3\}$

c(G) = c(G,H) = 1.

Beweis:

Sei X = X(G,H). Abb. 16 zeigt den Graphen Y = $X|_H$.

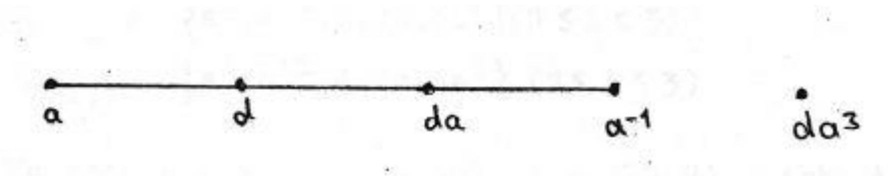


Abb. 16

14.4. LEMMA:

G = (14.2) = DH(7) = $\langle a,d] a^7 = d^2= e, dad = a^{-1}\rangle$, H = $\{a,a^{-1},d,da,da^{-1}\}$,

⇨ c(G) = c(G,H) = 1.

Beweis:

Sei X = X(G,H). Abb. 17 zeigt den Graphen $X = X|_H$.

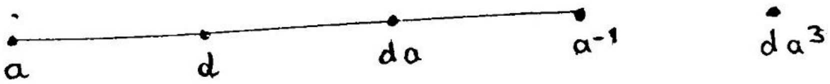


Abb. 17

14.5. LEMMA:

G = (16.12) = DH(8) = $<a,d|\ a^8 = d^2 = e,\ dad = a^{-1}>$, H = $\{d,da,da^2,da^4\}$.

⇨ c(G) = c(G,H) = 1.

Beweis: Abb. 18 zeigt den Graphen $Y = X|_K$.

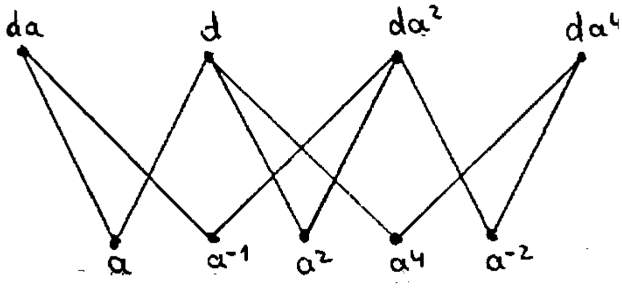


Abb. 18

14.6. LEMMA: '

Sei G_n = DH(n) =- $<a,d\ |\ a^n = d^2 = e,\ dad = a^{-1}>$ und H = $(d,da,da^3\}$.

Ist $n \geq 9$, so ist $X_n = X(G_n,H)$ minimale GRR von G_n.

Beweis:'

Sei $n \geq 9$. Ist K ein CES und |K| <3, so ist K = $\{d,da^i\}$ mit $1\ i \leq i \leq n-1$.

Dann ist $a(G_n,K) > 2$. Es ist $a(G_n,H) = 1$. Wir zeigen, daß $c(G_n,H) = 1$ ist. Abb. 18 zeigt den Graphen $X^{(3)}$. Die durchbrochenen Kanten gehören nur im Fall n = 9 zum Graphen. Es folgt nun, daß die Ecken da^2 und a^{-2} unter $A_e(X_n)$ fest bleiben, Dann bleiben auch die Ecken a^2,da,da^3 unter $A_e(X_n)$ fest. Also bleibt H unter $A_e(X_n)$ fest, und es ist c(G,H)=1.

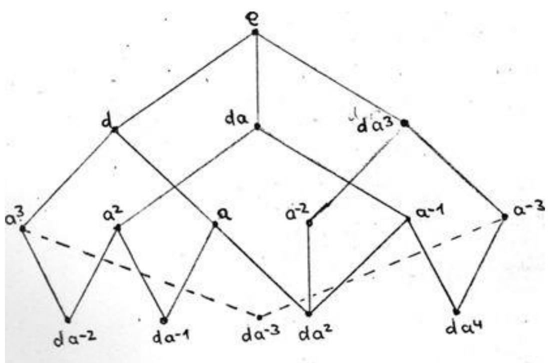


Abb. 19

14.7. Folgerung: [Wa 1, Theorem 2]

Sei $G = DH(n)$, $n \geq 3$. Ist $n \geq 6$, so ist $c(G) = 1$. Ist $n \in \{3,4,5\}$ so ist $c(G) = 2$.

Beweis:

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den Lemmas 14.1 – 14.6.

14.8. SATZ: [No-Wa 1, Theorem 2]

Sei $G = SPC(r,s;t) = <a,b| a=b=e, b^{-1}ab=a^t >$ eine SPC-Gruppe.

Ist dann G keine der Gruppen:

(6. 2) = DH(3)	(10. 2) = DH(5)
(8. 4) = DH(4)	(16.11) = SPC(8,2;5),

so ist $c(G) = a(G,H) = 1$.

Beweis:

[No-Wa 1, p. 1000].

14.9. LEMMA: [Wa 3, Prop. 3.7]

$G = (12.4) = A_4 = <a,b,d \mid a^2=b^2=d^3=e,\ d^{-1}ad = b,\ d^{-1}bd = ab>$, $H =\{d,d^{-1},a\}$.-

$\Rightarrow c(G) = c(G,H) = a(G) = 2$.

Beweis:

Sei $X = X(G,H)$. Abb. 20 zeigt den Graphen X.

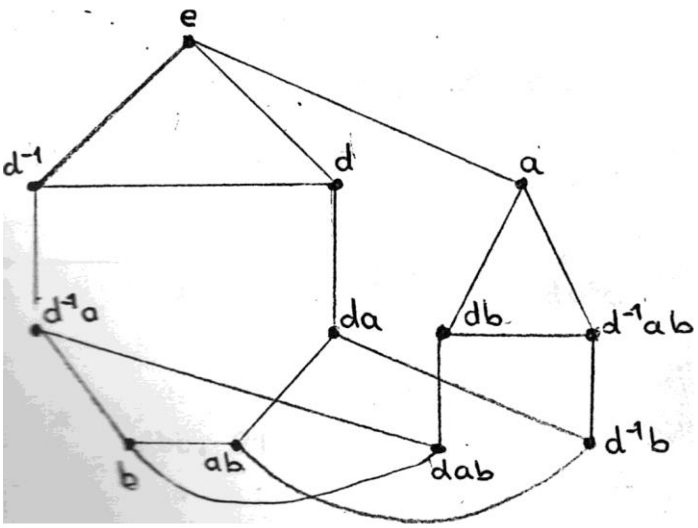


Abb. 20

14.10. LEMMA: [Wa 3, Prop. 5.1]

$G = (16.6) = GDH(4,2) = (a,c,d\ ]\ a^4 = c^2 = d^2 = e,\ dad = a^{-1}\}$; $H = \{a,a^{-1},d,da,dac\ \}$.

$\Rightarrow c(G) = c(G,H) = 1$.

Beweis:

Sei $X = X(G,H)$. Abb. 24 zeigt den Graphen $Y = X_1$.

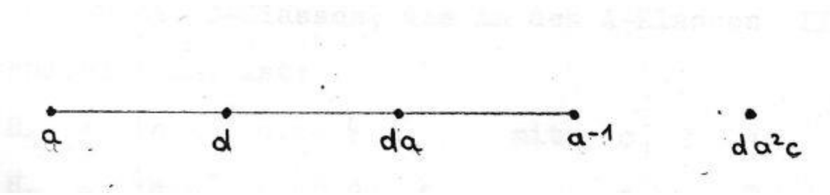


Abb. 21

14.11. LEMMA: [Wa 3, Prop. 5.3]

$G = (16.8) = GDCH(4) = \langle a,b,d \mid a^4=d^2=e, b^2=a^2, b^{-1}ab = a^{-1}, dbd= b^{-1}\rangle, H = \{a,a^{-1},d,db,dab\}$.

$\Rightarrow c(G) = a(G) = c(G,H) = 2$.

Beweis:

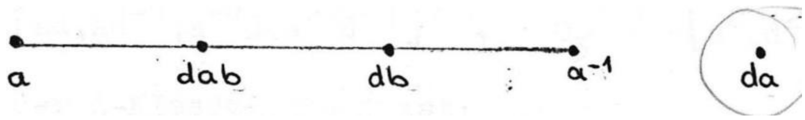


Abb. 22

14.12. LEMMA: [Wa 3, Prop. 5.2]

$G = (16.9) = \langle a,c,d \mid a^4 = c^2 = e, d^2 = c, d^{-1}ad = a^{-1}c\rangle, H = \{a,a^{-1},d,d^{-1},ad,a^2\}$.

$\Rightarrow c(G) = c(G,H) = 1$.

Beweis:

Sei $X = X(G,H)$. Abb. 23 zeigt den Graphen $Y=X|_H$.

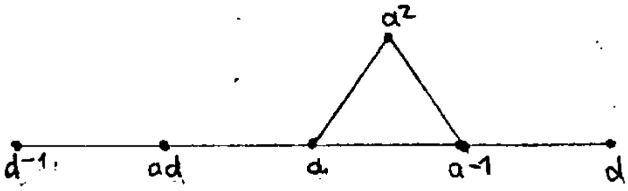


Abb. 23

14.13 LEMMA:([No-Wa 1, Prop. 3.1])

$G = (16.11) = SPC(8,2;5) = \langle a,b \mid a^8 = b^2 = e, bab = a^5\rangle, H = \{a,a^{-1};a^2,a^{-2};b\ ]$

$\Rightarrow c(G) = a(G) = c(G,H) = 2$.

Beweis:

Sei $X = X(G,H)$. Abb. 24 zeigt den Graphen $Y = X|_H$.

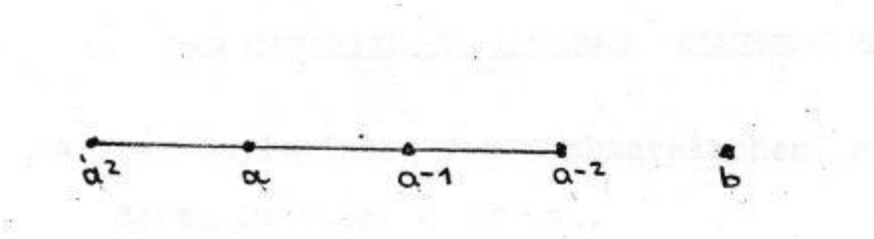


Abb. 24

14.14. LEMMA ([Wa 3, Theorem 2])

$G = (18.5) = GDH(3,3) = <a,b,d\ (\ a^3=b^3=d^2=e, dad=a^{-1}, dbd=b^{-1}>$, $H = \{a,a^{-1},d,da,db]$

⇨ $c(G) = a(G) = c(G,H) = 2$.

Beweis:

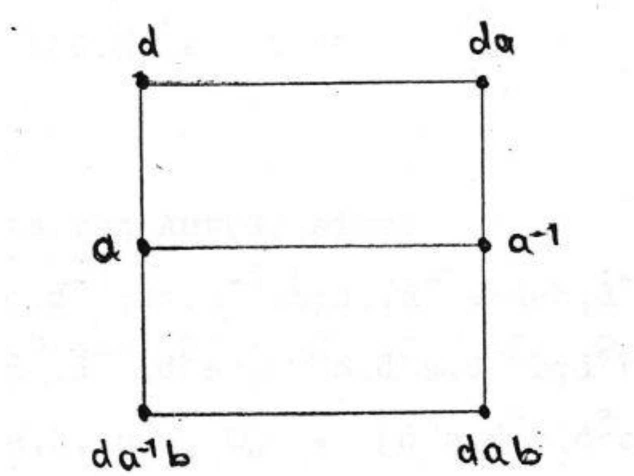


Abb. 25

14.15 LEMMA:

$G = (24.4) = A_4 \times Z_2 = <a,b,d\ | a^2 = b^2 = d^6 = e, d^{-1}ad=b,\ d^{-1}bd=ab>$; $H = \{d,d^{-1},a,d^3b\}$.

⇨ $c(G) = c(G,H) = 1$.

Beweis:

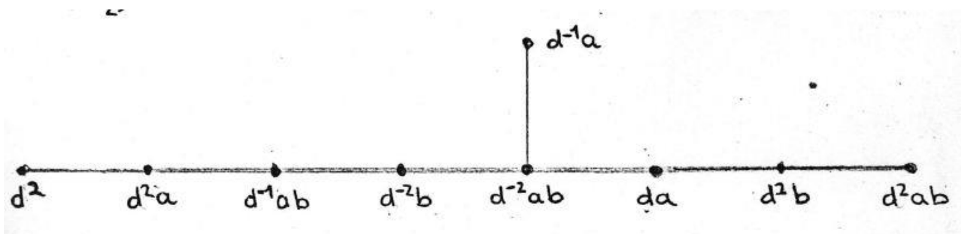


Abb. 26

,

14.16. LEMMA:'

$G = (24.5) = GDH(6,2) = \langle a,c,d \mid a^6 = c^2 = d^2 = e,\ dad = a^{-1}\rangle$, $H = \{d, da, da^3, dc, {}^{a3}c\}$.

$\Rightarrow c(G) = c(G,H) = 1$.

14.17. LEMMA: [Wa 3]

$G = (24.7) = Q \times Z_3 = \langle a,b,c \mid a^4 = c^3 = e,\ b^2 = a^2,\ b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$;

$H = \{ab, ab^{-1}, abc, ab^{-1}c^{-1}, ac, a^{-1}c^{-1}\} \Rightarrow c(G) = a(G) = c(G,H) = 2$.

14.18. LEMMA: ([Wa 3, Prop. 3.5])

$G = (24.11) = S_4 = \langle a,b,c,d \ (\ a^2 = b^2 = c^3 = d^2 = e, c^{-1}ac = b,\ c^{-1}bc = ab, dad = b, dbd = a, dcd = c^{-1}\rangle$,

$H = \{b, d, dcb\} \Rightarrow c(G) = c(G,H) = 1$.

Beweis:

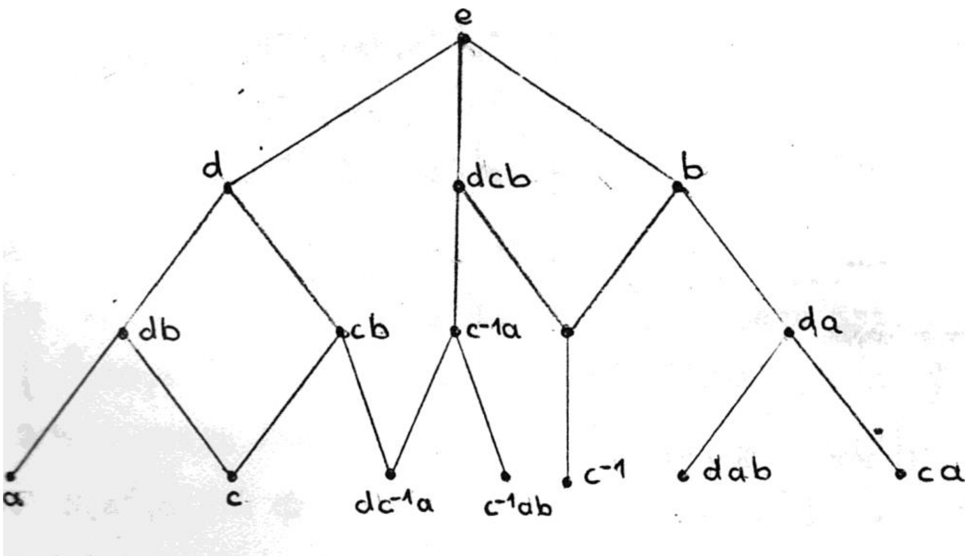


Abb. 28

14.19. LEMMA:

$G = (24.12) = \langle a,b,d \mid a^4 = d^3 = e, b^2 = a^2, b^{-1}ab = a^{-1}, d^{-1}ad = b, d^{-1}bd = ab\rangle$,

$H = \{a, a^{-1}, d, d^{-1}, da^{-1}, d^{-1}ab\} \ \Rightarrow\ c(G) = c(G,H) = 1$.

Beweis:

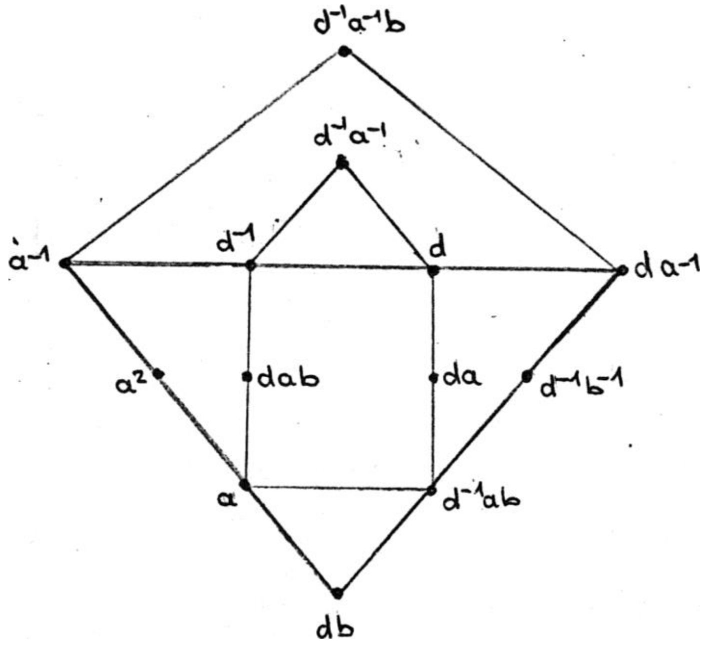


Abb. 29a

14.19.b LEMMA:

G = (24.13) = <a,b,d | $a^6=d^2=e$, $b^2=a^3$,$b^{-1}ab=a^{-1}$,$dbd=b^{-1}$>= GDCH(6),

H = {b,b^{-1},da^2,da^{-2},dba}. ⇨ c(G). = c(G,H) = 1.

Beweis:

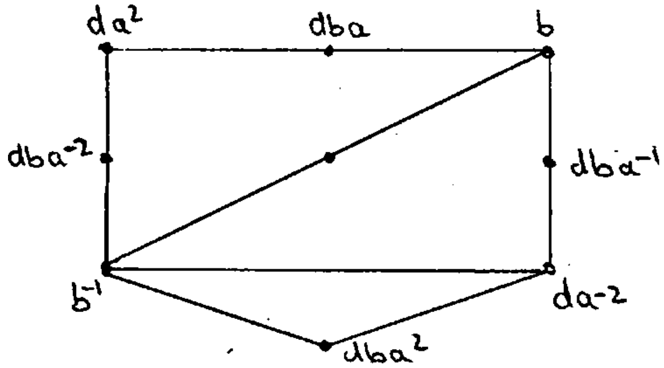


Abb. 29b

14.20.LEMMA: ([No-Wa 2, Theorem 3])

G = (27.4) = <a,c,b| $a^3 = c^3 = b^3 = e$, $b^{-1}ab = ac$>, H = {a,a^{-1},b,b^{-1},ac,$a^{-1}c^{-1}$,abc,$a^{-1}b^{-1}c$}.

⇨ c(G) = c(G,H) = 2.

Beweis:

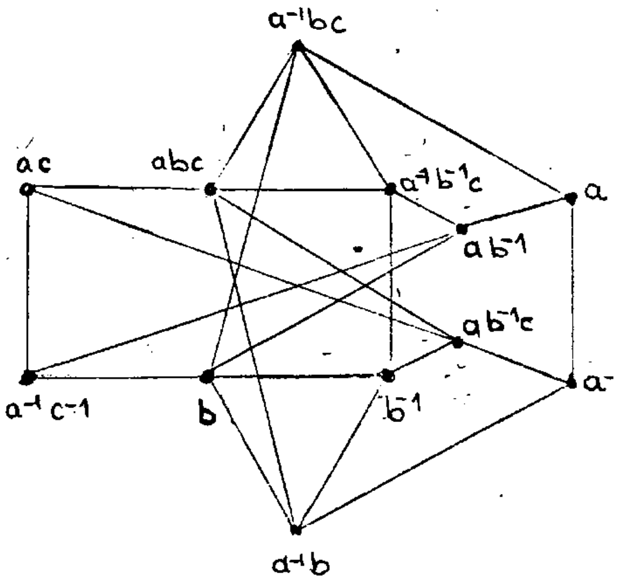


Abb. 30

14.21. LEMMA:

G = (32.13) = SPC(8,2;5) x Z_2 =<a,b,c |$a^8=b^2=c^2=e$, bab = a^5>

H = {a,a^{-1},ac,a^{-1}c,b,ba,ba^3,c}. ⇨ c(G) = c(G,H) = 1.

Beweis:

Sei X = X(G,H). Abb. 31a zeigt den Graphen Y = X|$_H$.

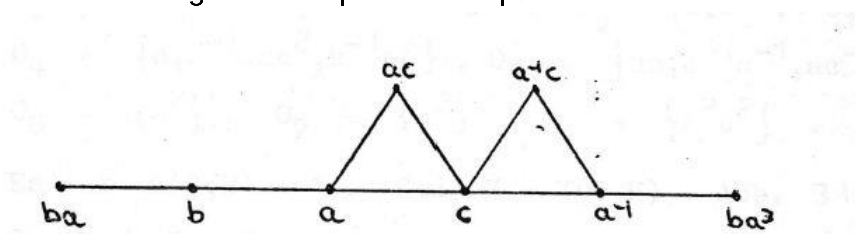


Abb. 31 a

14.21‘. LEMMA:

G = (32.14) = DH(4) x Z_4 = <a,d,c|$a^4=d^2=c^4=e$, dad=a^{-1}>,

H = {d,dac,dac^{-1},a,a^{-1},c,c^{-1},ac,$a^{-1}c^{-1}$,a^2}. ⇨ c(G) = c(G,H) = 1.

Beweis: Abb. 31b zeigt den Graphen Y = X|$_H$.

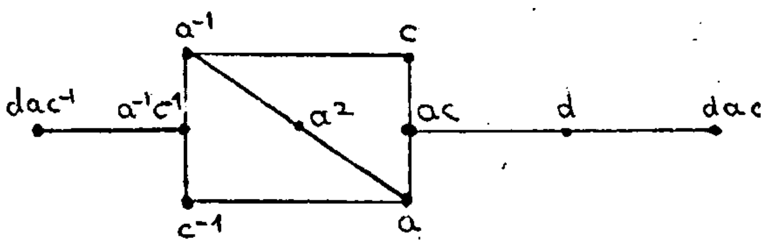


Abb. 31b

14.22. LEMMA: ([Wa 2])

$G = (32.15) = Q \times Z_4 = \langle a,b,c \mid a^4 = c^4 = e,\ b^2 = a^2, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$,

$H = \{a,a^{-1},b,b^{-1},c,c^{-1},ac,a^{-1}c^{-1},abc,ab^{-1}c^{-1},c^2\}$. $\Rightarrow$ $c(G) = a(G) = c(G,H) = 2$.

Beweis:

Abb. 32 zeigt den Graphen $Y = X|_H$.

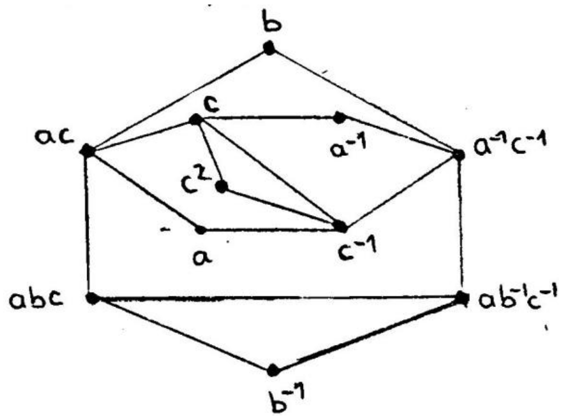


Abb. 32

14.23. LEMMA:

$G = (32.16) = \langle a,b,d \mid a^4 = b^2 = d^4 = e,\ d^{-1}bd = ba^2 \rangle$ $H = \{a,a^{-1},d,d^{-1},d^2,db,d^{-1}a^2b,b\}$

$\Rightarrow c(G) = c(G,H) = 1$.

Beweis:.

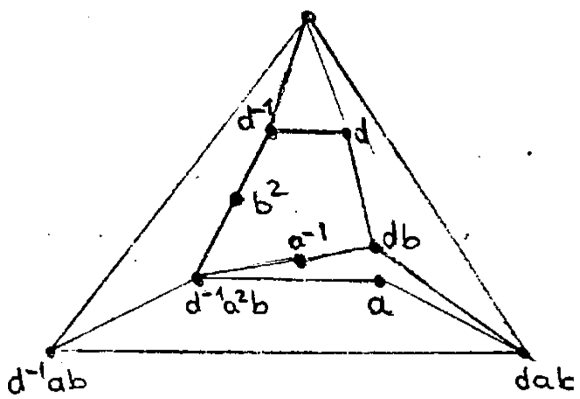


Abb. 33

14.24. LEMMA:

$G = (32.17) = \langle a,b,d \mid a^8 = b^2 = d^8 = e,\ dbd = ba^4 \rangle$, $H = \{a,a^{-1};b,d,ba,ba^{-1},bda,bda^3\}$.

$\Rightarrow c(G) = c(G,H) = 1$.

Beweis:

Abb. 34 zeigt den Graphen $Y = X|_H$.

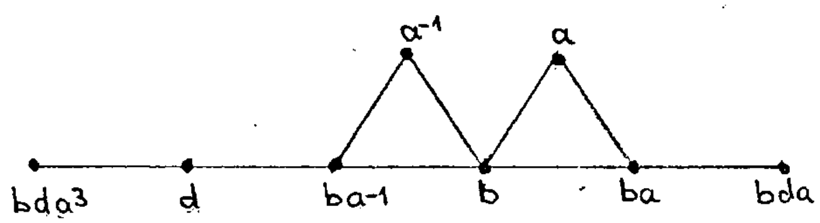


Abb. 34

14.25. LEMMA:

$G = (32.18) = (a,c,d \mid a^4 = c^2 = d^4 = e,\ d^{-1}ad = ac>, H = \{a,a^{-1},d,d^{-1},ad,a^{-1}d^{-1}c,a^2,d^2,a^2c,c\}$

⇨ $c(G) = c(G,H) = 1$.

Beweis:

Sei X_= X(G,H). Abb. 35 zeigt den Graphen $Y = X|_H$.

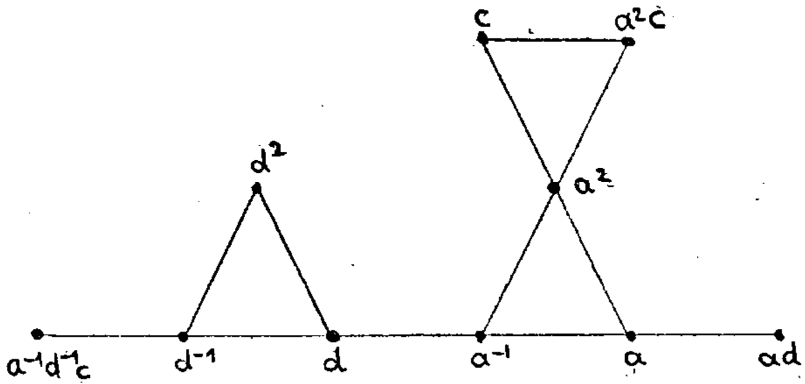


Abb. 35

14.26. LEMMA:

$G = (32.20) = (a,c,d \mid a^8 = c^2 = d^8 = e,\ dad = ac>, H = \{a,a^{-1},ad,a^{-1}dc,d,a^2,a^{-2}\}$.

⇨ $c(G) = c(G,H) = 1$.

Beweis:

Sei X = X(G,H). Abb. 36 zeigt den Graphen $Y = X|_H$.

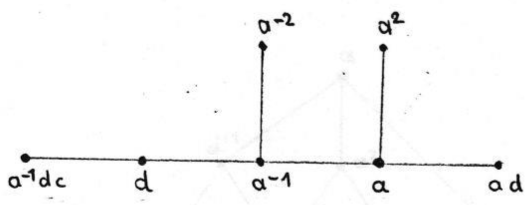


Abb. 36

14.27. LEMMA:

G = (32.28) = $<a,c,d \mid a^8 = c^2 = e, d^2 = a^4, d^{-1}ad = a^{-1}c>$, H = $\{a,a^{-1},d,d^{-1},da,d^{-1}ac,a^2,a^{-2},a^4\}$

⇨ c(G) = c(G,H) = 1.

Beweis:

Sei X = X(G,H). Abb. 37 zeigt den Graphen Y = $X|_H$.

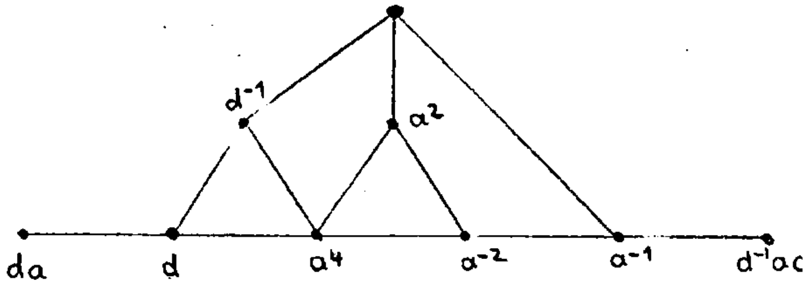


Abb. 37

14.28. LEMMA:

G = (32.31) = $<a,c,d \mid a^4 = c^4 = d^2 = e, dad = a^{-1}c>$, H = $\{a,a^{-1},d,da,dac^{-1},c,c^{-1}\}$.

⇨ c(G) = c(G,H) = 1.

Beweis:

Sei X = X(G,H). Abb. 38 zeigt den Graphen Y = $X_H|$.

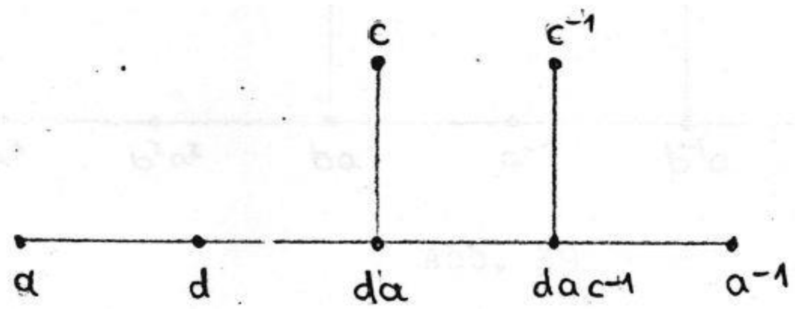


Abb. 38

14.29. LEMMA:

G = (32.32) = $<a,b \mid a^8 = e, b^4 = a^4, b^{-1}ab = a^{-1}>$, H = $\{a,a^{-1},b,b^{-1},ba,b^{-1}a,ba^3,b^{-1}a^3,b^2a^2\}$.

⇨ c(G) = c(G,H) = 1.

Beweis:

Sei X = X(G,H). Abb. 39 zeigt den Graphen Y = X|H.

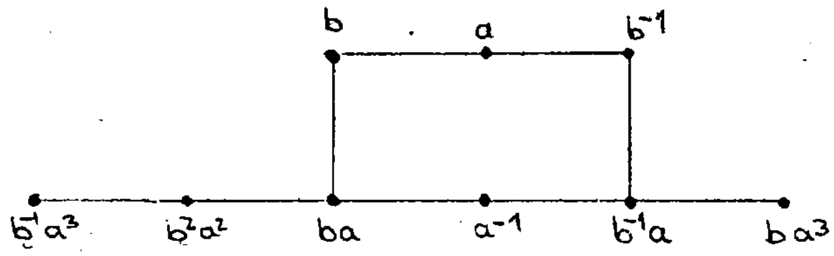


Abb. 38

14.30. LEMMA:

G = (32.37) = <a,b,c,d| $a^4=b^2=c^2=e, d^2 = a^2, d^{-1}ad = a^{-1}, d^{-1}bd = bc$>,

H = {a,a^{-1},d,d^{-1},db,d^{-1}bc,dab,d^{-1}abc,b,c} ⇨ c(G) = c(G,H) = 1.

Beweis:

Sei X = X(G,H). Abb. 40 zeigt den Graphen Y = X|H.

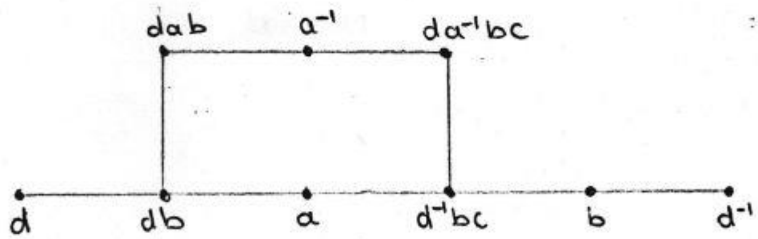


Abb. 40

14.31. LEMMA:

G = (32.38) = <a,b,c,d|$a^4=b^2=c^2=d^2=e$, dad = ac, dbd = a^2b>,

H = <b,c,d,a,a^{-1},da,$da^{-1}c$,db,da^2b} ⇨ c(G) = c(G,H) = 1.

Beweis:

Sei X = X(G,H). Abb. 41 zeigt den Graphen Y = X_1.

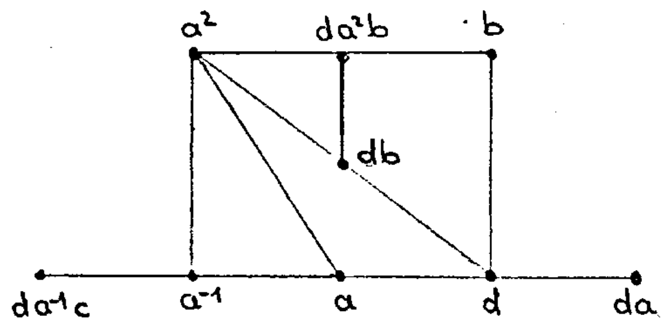


Abb. 41

14.32. LEMMA:

G = (32.39) = $\langle a,b,d \mid a^4 = b^4 = d^2 = e,\ dad = a^{-1},\ dbd = b^{-1}a^2\rangle$,

H = $\{a,a^{-1},b,b^{-1},ab,a^{-1}b^{-1},a^2,d,db,da^2 b\}$. ⇨ c(G) = c(G,H) = 1.

Beweis:

Sei X = X(G,H). Abb. 42 zeigt den Graphen Y = $X|_H$

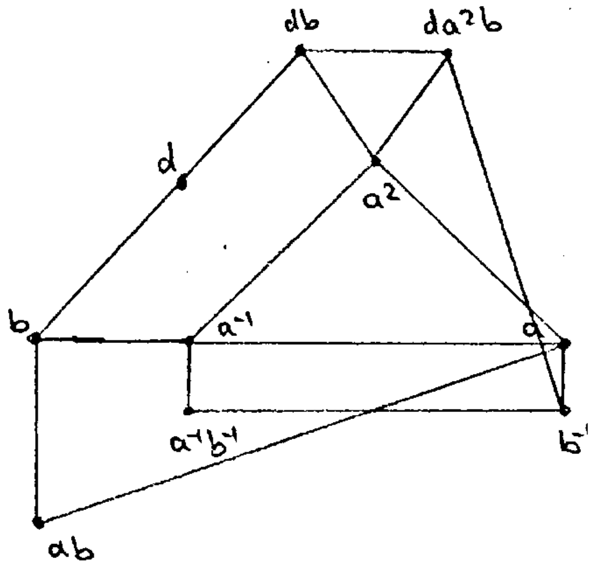


Abb. 42

14.33. LEMMA:

G = (32.40) = $\langle a,b,d \mid a^4=b^4=e, d^2=b^2, d^{-1}ad=a^{-1}, d^{-1}bd=a^2b^{-1}\rangle$,

H = $\{a,a^{-1},b,b^{-1},d,d^{-1},db,d^{-1}a^2b,dab,d^{-1}a^{-1}b,ab,a^{-1}b^{-1},b^2\}$ ⇨ c(G) = c(G,H) = 1.

Beweis:

Sei X = X(G,H). Abb. 43 zeigt den Graphen Y = $X|_H$

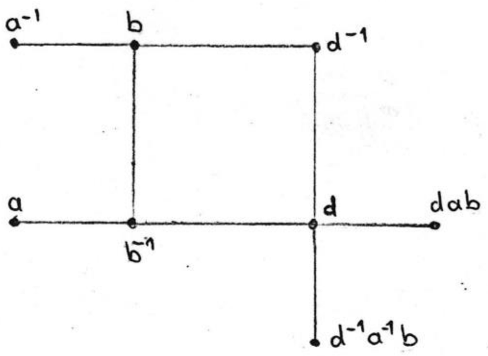


Abb. 43

14.34. LEMMA:

G = (32.41) = $\langle a,b,d \mid a^4 = d^4 = b^2 = e,\ bab = a^{-1}d^2,\ bdb = da^2 \rangle$,

$H = \{a,a^{-1},d,d^{-1},a^2,d^2,b,ba,bad^2,bd,ba^2d^{-1}\}$. ⇨ c(G) = c(G,H) = 1.

Beweis:

Sei X = X(G,H). Abb. 44 zeigt den Graphen $Y = X|_H$

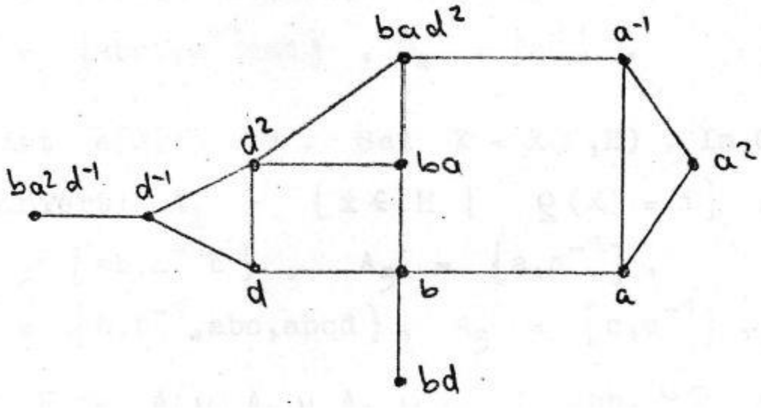


Abb. 44

14.35. LEMMA:

G = (32.43) = $\langle a,b,c,d \mid a^2=b^2=c^2=d^2=[a,b]=[a,c]=[a,d]= [b,c] = [b,d] = [c,d] = p,\ p^2 = e \rangle$,

$H = \{a,b,c,ab,abc,abd,bcd,abcd\}^{\pm}$. ⇨ c(G) = c(G,H) = 1.

Beweis:

Abb. 45 zeigt den Graphen $Y = X|_K$.

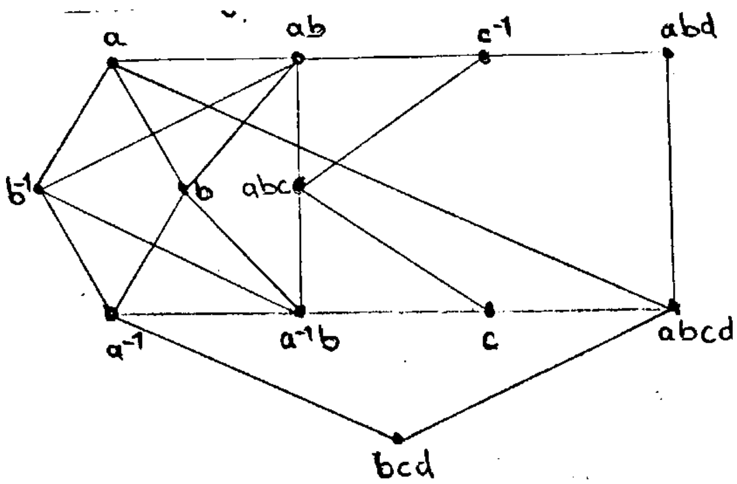


Abb. 45

14.36. LEMMA:

G = (32.46) = $<a,b,c,d \mid a^2 = b^2 = c^2=d^4=e,\ d^{-1}ad = ab,\ d^{-1}bd = bc>$,

H = $\{a,b,c,d,d^{-1},d^2,da,d^{-1}abc,db,d^{-1}bc\}$. ⇨ c(G) = c(G,H) = 1.

Beweis:

Sei X = X(G,H). Abb. 46 zeigt den Graphen Y = $X|_H$.

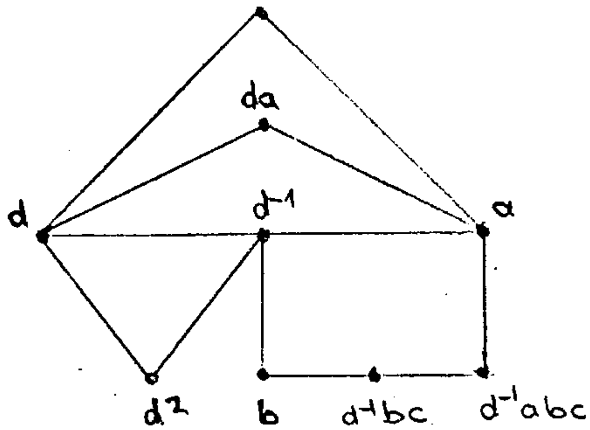


Abb. 46

14.37. LEMMA:

G = (32.48)=$<a,b,d \mid a^8=b^2=e, d^2=a^4,\ bab=a^5, d^{-1}ad=ab>$ H = $\{a,a^{-1},a^2,a^{-2},a^4,d,d^{-1},da,da^{-1}b\}$.

⇨ c(G) = c(G,H) = 1.

Beweis:

Sei X = X(G,H). Abb. 47 zeigt den Graphen Y = $X|_H$.

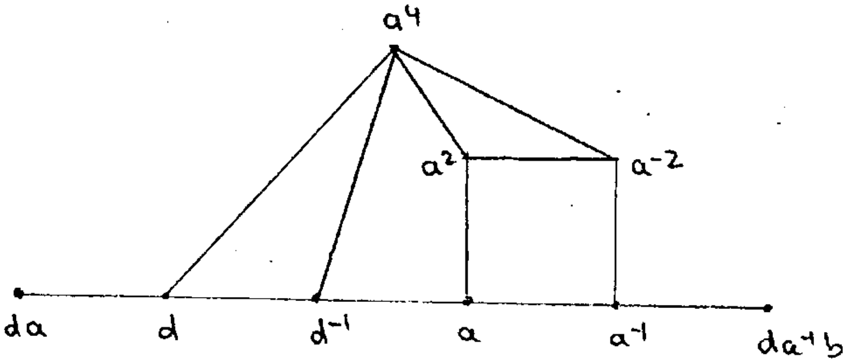


Abb. 47

14.38. SATZ:

Sei G eine nichtabelsche, nicht verallgemeinert dizyklische Gruppe, deren Ordnung ≤32 ist. Ist dann G eine der Gruppen

(6.2) = DH(3)	(16.11) = SPC(8,2;5)
(8.4) = DH(4)	(18.5) = GDH(3,3)
(10.2) = DH(5)	(24.7) = Q x Z_3
(12.4) = A_4	(27. 4)
(16.8) = GDCH(4)	(32.15) = Q x Z_4,

so ist c(G) = 2.

Ist G keine dieser Gruppen, so ist c(G) = 1.

Beweis

Ist G = DH(3), so ist c(G) = 2 nach Lemma 14.1.

Ist G = DH(4), so ist c(G) = 2 nach Lemma 14.2.

Ist G = DH(5), so ist c(G) = 2 nach Lemma 14.3.

Ist G = (12.4), so ist c(G) = 2 nach Lemma 14,9.

Ist G = (16.8) = GDCH(4), so ist c(G) = 2 nach Lemma 14.11.

Ist G = (16.11) = SPC(8,2;5), so ist c(G) = 2 nach Lemma 14.13.

Ist G = (18.5) = GDH(3,3), so ist c(G) = 2 nach Lemma 14.14.

Ist G = (24.7), so ist c(G) = 2 nach Lemma 14.17.

Ist G = (27.4), so ist c(G) = 2 nach Lemma 14.20.

Ist G = (32.15), so ist c(G) = 2 nach Lemma 14.22.

Ist G keine dieser Gruppen, so folgt die Aussage aus Tabelle 3 zusammen mit den Lemmas dieses Kapitels.

15. Der Cayleyindex einiger anderer Gruppen

15.1. LEMMA:

G = (36.a) = $A_4 \times Z_3$ =$<a,b,c,d \mid a^2=b^2=c^3=d^3=e, d^{-1}ad=b, d^{-1}bd=db>$,

H = $\{a,d,d^{-1},da,d^{-1}ab,dbc,d^{-1}ac^{-1},bc,bc^{-1}\}$ ⇨ c(G) = c(G,H) = 1.

Beweis:

Sei X = X(G,H). Abb. 48 zeigt den Graphen Y = $X|_H$. Es ist $N(a) \cap N(d) = \{e,d^{-1}\}$ und $N(a) \cap N(da) = \{e,d^{-1},da,d^{-1}ab,dbc, d^{-1}ac^{-1}, bc,bc^{-1}\}$.

Da a unter $A_e(X)$ fest bleibt, bleibt auch H unter $A_e(X)$ fest, wie aus der Struktur des Graphen Y folgt. Also ist c(G) = c(G,H) = 1.

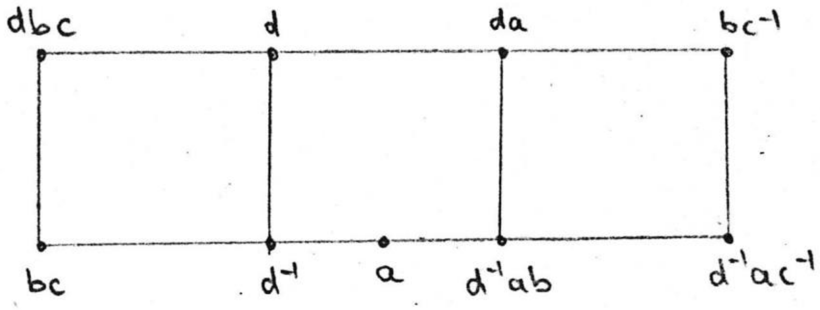


Abb. 48

15.2. LEMMA:

G = (36.b) = $<a,b,d \mid a^3=b^3=d^4=e, d^{-1}ad=b, d^{-1}bd=a^{-1}>$, H = $\{a,a^{-1},d,d^{-1},da,d^{-1}b,d^2\}$

⇨ c(G) = c(G,H) = 1.

Beweis:

Sei X = X(G,H). Abb. 49 zeigt den Graphen Y = $X_{|H}$

Es ist $A_e(X)|_H = A(Y) = \{1\}$. Also ist c(G) = c(G,H) =1 nach Satz 3.11.

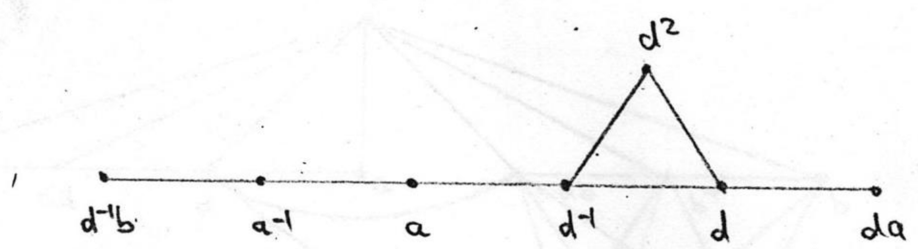


Abb. 49

15.3. LEMMA:

$G = (36.c) = GDH(6,3) = \langle a,b,d \mid a^6=b^3=d^2=e,\ dad=a^{-1}, dbd=b^{-1}\rangle$, $H = \{a,a^{-1},b,b^{-1},d,da,db\}$

$\Rightarrow c(G) = c(G,H) = 1$.

Beweis:

Sei $X = X(G,H)$. Abb. 50 zeigt den Graphen $Y = X_{|H}$. Sei $K = \{a,d,b\}$. Dann bleibt K unter $A_e(X)$ fest. Da $\langle K\rangle = G$ ist, ist $c(G) = c(G,H) = 1$ nach Satz 3.11.

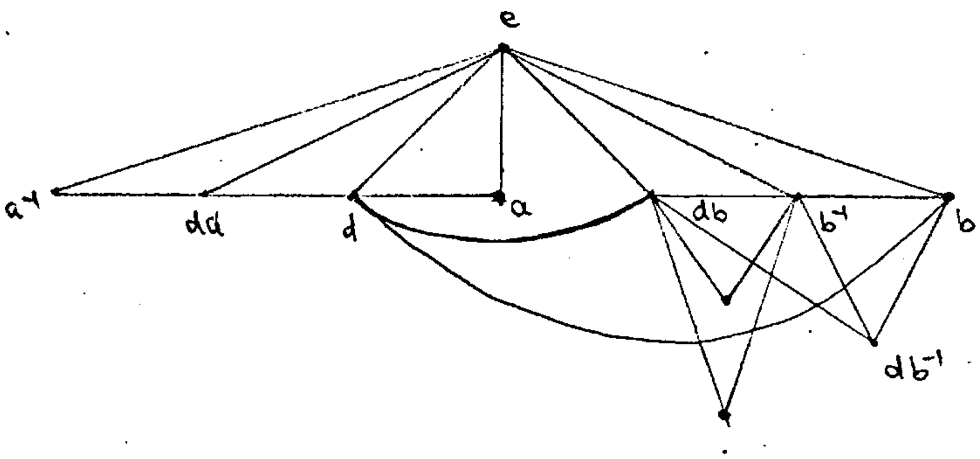


Abb. 50

15.4. LEMMA:

$G = (36.d) = \langle a,b,d \mid a^2=b^2=d^9=e, d^{-1}ad=b, d^{-1}bd=ab\rangle$, $H = (a,d,d^{-1},d^2b,d^{-2}ab,d^3b,d^{-3}b)$

$\Rightarrow c(G) = c(G,H) = 1$.

Beweis:

Sei $X = X(G,H)$. Sei $K = \{x \in S_2 \mid \rho(x,H)=3\}$. Dann ist $K = \{da,d^{-1}a,d^3ab,d^{-3}ab\}$. Sei $M = H \cup K$.

Dann bleibt M unter $A_e(X)$ stabil. Abb. 51 zeigt den Graphen $Y = X|_M$. Aus der Struktur des Graphen Y folgt, daß $A_e(X)|_M = \{1\}$ ist. Nach Satz 3.11. ist dann $c(G) = c(G,H) = 1$.

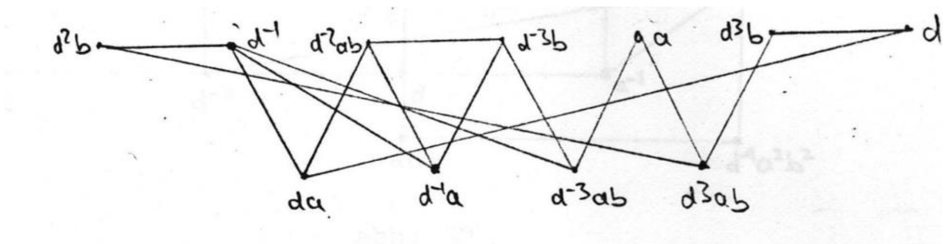


Abb.51

15.5. LEMMA:

G = (48.a) = $<a,b,d \mid a^4=b^4=d^3=e,\ d^{-1}ad = b,\ d^{-1}bd = a^{-1}b^{-1}>$,

H =. $\{a,a^{-1},b,b^{-1},d,d^{-1},a^2,db,d^{-1}a^{-1},da^2,d^{-1}a^2b^2\}$. ⇨ c(G) = c(G,H) = 1.

Beweis:

Sei X = X(G,H). Abb. 52 zeigt den Graphen Y = $X|_H$ Es ist $A_e(X)|_H$ = A(Y) = {1}. Nach Satz 3.11. ist c(G) = c(G,H) = 1.

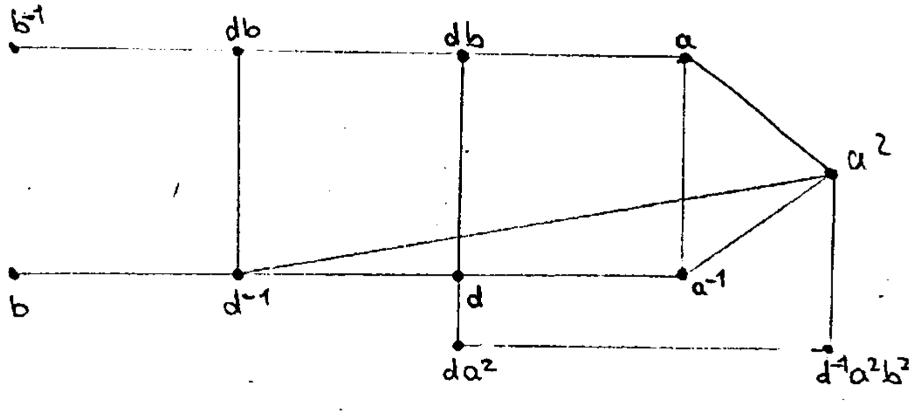


Abb. 52

15.6. LEMMA:

G = (48.b) = $<a,b,c,d,s \mid a^2=b^2=c^2=d^2=s^3=e,\ s^{-1}as=b, s^{-1}bs=ab\ s^{-1}cs = d, s^{-1}ds=cd>$,

H = $\{s,s^{-1},sb,s^{-1}a,sbd,s^{-1}ac,a,c,d,ad,bcd,abc\}$ ⇨ c(G). c(G,H) = 1.

Beweis:

Sei X = X(G,H). Abb. 53 zeigt den Graphen Y = $X|_H$ Aus der Struktur des Graphen Y geht hervor, daß.die Menge K = $\{a,d,s,s^{-1}\}$ unter $A_e(X)$ fest bleibt. Da <K> = G ist, ist c(G) = c(G,H) = 1 nach Satz 3.11.

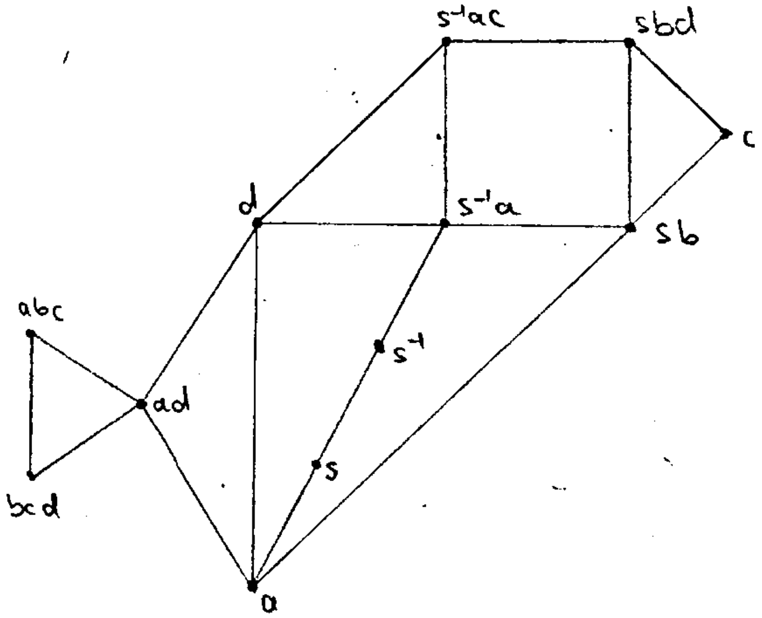


Abb. 53

15.7. LEMMA:

$G = (48.c) = \langle a,b,d,s \mid a^4=b^3=e,\ b^2=d^2=a^2, b^{-1}ab=a^{-1}, s^{-1}as=b,\ s^{-1}bs=ab \rangle$,

$H = \{a,a^{-1},d,d^{-1},da,s,s^{-1},sa,s^{-1}ab^{-1},sd,s^{-1}d^{-1}\} \Rightarrow c(G) = c(G,H) = 1$.

Beweis:

Sei $X = X(G,H)$. Abb. 54 zeigt den Graphen $Y = X|_H$. Aus der Struktur des Graphen Y folgt, daß $A_e(X)|_H = \{1\}$ ist. Also ist $c(G) = c(G,H) = 1$ nach Satz 3.11.

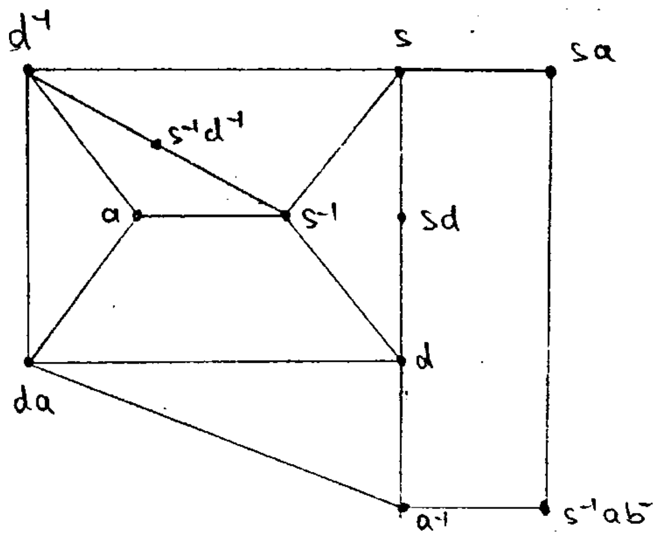


Abb. 54

15.8. LEMMA:

$G = (54.a) = (27.4) \times Z_2 = \langle a,b,c \mid a^3=b^3=c^6=e, b^{-1}ab=ac^2 \rangle$,

$H= \{a,a^{-1},b,b^{-1},ac^2a^{-1}c^{-2},abc^2a^{-1}b^{-1}c^2,c^3,bc^3,b^{-1}c^3\} \Rightarrow c(G) = c(G,H) = 1$.

Beweis:

Sei $X = X(G,H)$. Abb. 55 zeigt den Graphen $Y = X_{|H}$. Sei $H_0 = H - \{c^3,bc^3,b^{-1}c^3\}$ und $G_0 = \langle a,b,c^2 \rangle$. Sei $Xp = X(G_0,H_0)$. Dann ist $G_0 \cong (27.4)$ und X_0 isomorph zu der in Lemma 14.20. angegebenen ARR der Gruppe (27.4). Aus der Struktur des Graphen Y folgt, daß H_0 unter $A_e(X)$ stabil bleibt. Also bleibt auch G_0 unter $A_e(X)$ stabil, und es ist $A_e(X)|_{G0} \leq A_e(X)) = \{1, \alpha\}$ wobei α (a)= a^{-1} und α (b) = abc ist.

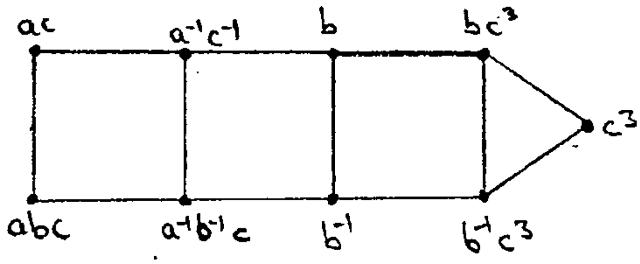


Abb. 55

Also folgt, daß $Ae(X)\ |_H = \{1\}$ ist. Dann ist $c(G) = c(G,H)= 1$.

15.9. LEMMA:

G = (54.b) = GDH(3,3) x Z_3 =<a,d,b [$a^3=b^3=d^6=e,d^{-1}ad=a^{-1}$,d $d^{-1}bd = b^{-1}$>,

H = {$a,a^{-1},d,d^{-1},d^2b^{-1},d^{-2}b,d^3a,d^3b,d^3$} ⇨ c(G) = c(G,H) = 1.

Beweis:

Sei X=X(G,H). Sei K ={x∊S2 |ρ(x,H)=3}. Dann ist K={d2,d-2,db-1,d-1b-1}. Sei M = H∪K. Abb. 56 zeigt den Graphen Y = $X|_M$ - $E(X|_K)$. Es ist N(a) ∩ N(d) = {e,da^{-1}} und $N(d^3a)$ ∩ N(d) = Ø. Da d unter $A_e(X)$ fest bleibt, folgt, daß auch H unter $A_e(X)$ fest bleibt. Also ist c(G) = c(G,H) = 1.

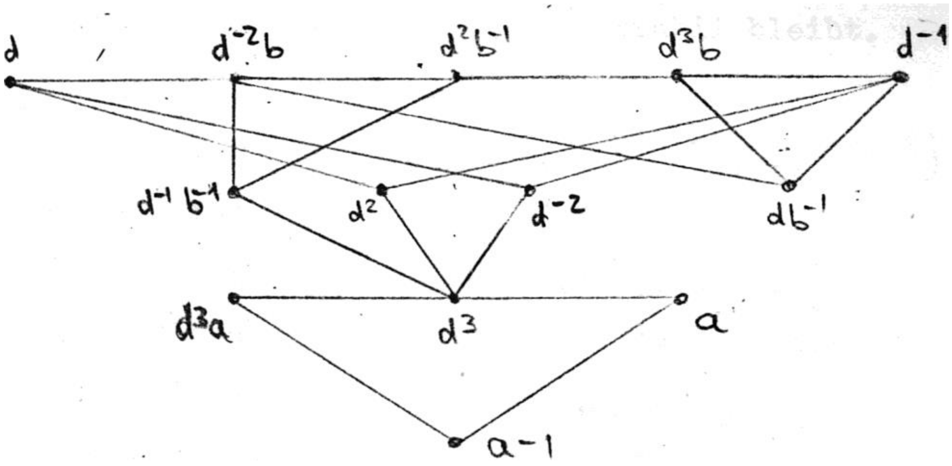


Abb. 56

15.10. LEMMA: **[**Wa 3, Theorem 2]

G = (54.c) = GDH(3,3,3) = <a,b,c,d) $a^3=b^3=c^3=d$ =e,dad=a^{-1},dbd=b^{-1},dcd=c^{-1} >,

H = {$a,b,c,ab,ac,bc,d,da,db^{-1},dac^{-1}$} ⇨ c(G) = c(G,H) = 1.

Beweis:

Sei X = X(G,H). Sei L = <a,b,c>. Dann ist L = Z_3^3. Sei H_0= E ∩ L und K = H - L.

Der Graph G_0= X(L,H_0) ist die in Lemma 10.18. angegebene MRR der Gruppe L.

Sei M = N(K, $H\rho_0$) und N = K ∪ M. Sei Y = $X|_H$ und $Y_1 = X|_N - E(X|_M)$. Abb.57 zeigt den Graphen Y_1. Wir zeigen nun, daß L unter $A_e(X)$ stabil bleibt.

Es ist: ρ(x,H) = 2 für x = dac^{-1}

ρ(x,H) = 3 für x ∊ {$d,db^{-1},ac,a^{-1}c^{-1},bc,b^{-1}c^{-1}$}

ρ(x,H) = 4 für x ∊ {$ab,a^{-1}b^{-1}$}

ρ(x,H) = 6 für. x ∊ {$a,a^{-1},b,b^{-1},c,c^{-1}$,da}

Weiter ist $N(dac^{-1},H) \cap N(ab,H) = \{\}$ und $N(dac^{-1},H) \cap N(a^{-1}b^{-1},H) = \{da\}$.
Daraus folgt nun, daß dac^{-1} unter $A_e(X)$ fest bleibt, $\{ab, a^{-1}b^{-1}\}$ stabil bleibt, und deshalb auch da fest bleibt. Dann bleibt die Menge $B = \{a,a^{-1},b,b^{-1},c,c^{-1}\}$ unter $A_e(X)$ stabil.

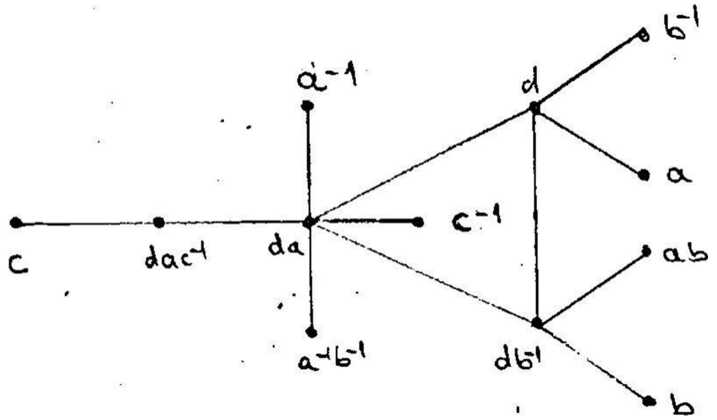


Abb.57

Da <B> = L ist, bleibt nach Lemma 3.13. auch L unter $A_e(X)$ stabil. Dann bleiben auch die Mengen K, M und X stabil. Ist $\Phi \in A_e(X)$, so ist $\Phi_L \in A_e(X_0) = Aut(L,E_0)$ und $\Phi_L[\{a,b,c\}] =\{ \{a,b,c\}, \{a^{-1},b^{-1},c^{-1}\}\}$. Aus der Struktur des Graphen Y_1 folgt nun, daß N unter $A_e(X)$ fest bleibt. Also ist nach Satz 3.11. c (G) = c(G,H) = 1.

15.11. LEMMA:

$G = (56.d) = \langle a,b,c,d\ [\ a^2=b^2=c^2=d^7=e,\ d^{-1}ad=b,\ d^{-1}bd=c,\ d^{-1}cd=ab\rangle$, $H = \{a,b,c,bc,d,d^{-1}\}$.
⇨ c(G) = c(G,H) = 1.

Beweis:

Sei X = X(G,H). Sei $K = \{x \in S_2 \mid \rho(x,H) \geq 2\}$., Dann ist $X = \{ac,ab,db,d^{-1}a,d^{-1}b,dc,abc\}$.
Sei $M = H \cup K$. Dann bleibt M unter $A_e(X)$ stabil. Abb. 58 zeigt den Graphen
$Y = X|_M$-- $E(X|_K)$. Aus der Struktur des Graphen Y folgt, daß die Menge H unter $A_e(X)$ fest bleibt. Also ist c(G) = c(G,H) = 1.

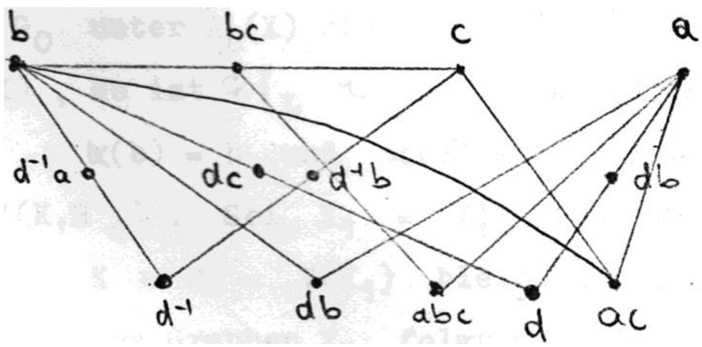


Abb. 58

15.12. LEMMA:

$G = (64.a) = (32.15) \times Z_2 = Q \times Z_4 \times Z_2 = <a,b,c,d \mid a^4=c^4 =d^2 =e,\ b^2 =a^2,\ b^{-1}ab = a^{-1}>$,

$H = \{a,a^{-1},b,b^{-1},c,c^{-1},ac,a^{-1}c^{-1},abc,ab^{-1}c^{-1},c^2\} \cup (d< a,b,c> - \{d,db,db^{-1},dbc,db^{-1}c^{-1}\})$

$\Rightarrow c(G) = c(G,H) = 1$.

Beweis:

Sei $X = X(G,H)$. Sei $G_0 = <a,b,c>$. Dann ist $G_0 \cong (32.15) = Q \times Z_4$. Sei $H_0 = H \cap G_0$ und $K = H' - G_0$. Dann ist $K =\{d,db,db^{-1},dbc,db^{-1}c^{-1}\}$. Der Graph $X_0 = X(G_0,H_0)$ ist die in Lemma 14.22. angegebene ARR der Gruppe G_0. Abb.50 zeigt den Graphen Y_1. Es ist X_0 aus der Klasse $Q_{2,6}$. Also bleibt G_0 unter $A_e(X)$ stabil.

Ist $\Phi \in A_e (X)$, so ist $\Phi|_L \in A_e(X_0) = \{1, \alpha\}$, wobei $\alpha(a) = a^{-1}$, $\alpha(b) = b$ und $\alpha(c) = c^{-1}$ ist.

Sei $M = N'(K,H_0)$. Sei $Y_1 = X|_K \cup M \cup E'(K,M)$. Die Menge $N = K$ u $M = V(Y_1)$ bleibt unter $A_e(X)$ stabil. Aus der Struktur des Graphen Y_1 folgt nun, daß H unter $A_e(X)$ fest bleibt. Nach Satz 3.11. ist dann $c(G) = c(G,H) = 1$.

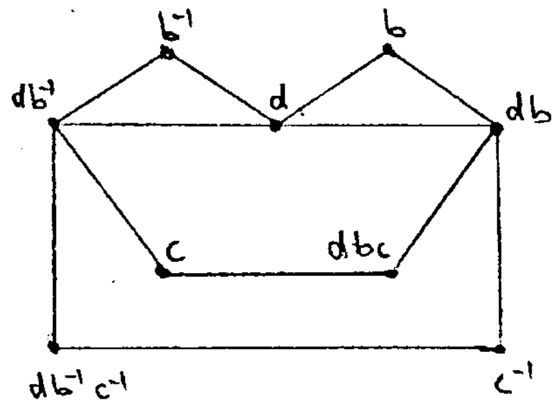


Abb. 59

15.13. LEMMA:

$G = (64.b) = Q \times Q =<a,b,c,d \mid a^4=c^4=e, b^2=a^2, d^2=c^2, b^{-1}ab = a^{-1},\ d^{-1}cd = c^{-1}>$

$H = <a,b,c> - \{e,a,a^{-1},b,b^{-1},c,c^{-1},ac,a^{-1}c^{-1},abc,ab^{-1}c^{-1},c^2 \} \cup \{d,d^{-1},db,d^{-1}b^{-1},da,d^{-1}a^{-1}\}$

$\Rightarrow c(G) = c(G,H) = 1$.

Beweis:

Sei $X = X(G,H)$. Sei $G_0 = <a,b,c>$. Dann ist $G_0 = (32.15) = Q \times Z_4$. Sei $H_0 = H \cap G_0$ und $K = H - G_0$. Der Graph $X_0 = X(G_0,H_0)$ ist der Komplementärgraph der in Lemma 14.22. angegebenen ARR der Gruppe G_0. Sei $M = N(K,H_0')$ und $Y_1 = X'|_K \cup M \cup E(K,M)$. Man rechnet leicht nach, daß der Graph X_0 in der Klasse $R_{2,6}$ ist. Also bleibt G_0 unter $A_e(X)$ stabil. Ist $\Phi \in A_e(X)$, so ist $\Phi|_L \in A_e(X_0) = \{1, \alpha\}$ wobei $\alpha(a) = a^{-1}, \alpha(b) = b$ und $\alpha(c) = c^{-1}$ ist. Abb. 60 zeigt den Graphen Y_1. Aus der Struktur des Graphen Y_1 folgt, daß H unter $A_e(X)$ fest bleibt. Nach Satz 3.11. ist dann $c(G) = c(G,H) = 1$.

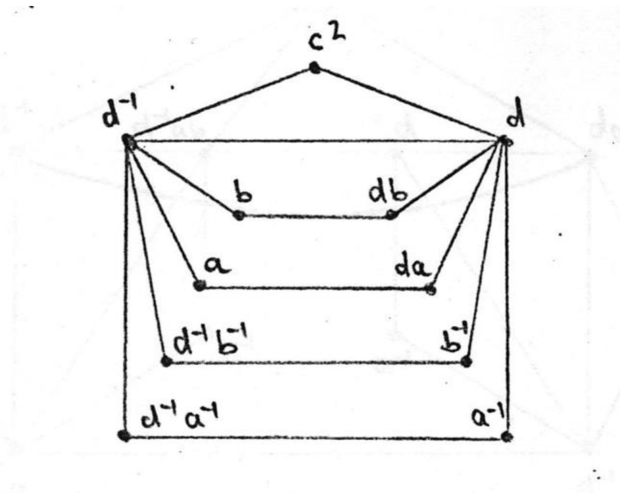


Abb. 60

15.14. LEMMA:

$G = (64.c) = \langle a,b,c,d \mid a^4=c^4=e, b^2 = a^2, d^2 = c^2, b^{-1}ab=a^{-1}, d^{-1}cd=c^{-1}, d^{-1}bd = b^{-1}\rangle$,

$H = \langle a,b,c\rangle - \{e,a,a^{-1},b,b^{-1},c,c^{-1},ac,a^{-1}c^{-1},abc,ab^{-1}c^{-1},c^2\} \cup \{d,d^{-1},dab,d^{-1}ab,da,d^{-1}a^{-1}\}$.

⇨ $c(G) = c(G,H) = 1$.

Beweis:

Sei $X = X(G,H)$. Sei $G_0 = \langle(a,b,c\rangle$. Dann ist $G_0 = (32.15) = Q \times Z_4$

Sei $H_0 = H \cap G_0$ und $K = H - G_0$. Der Graph $X_0 = X(G_0,H_0)$ ist den Komplementärgraph der in Lemma 14.22. angegebenen ARR der Gruppe G_0. Sei $M = N(K,H_0')$ und

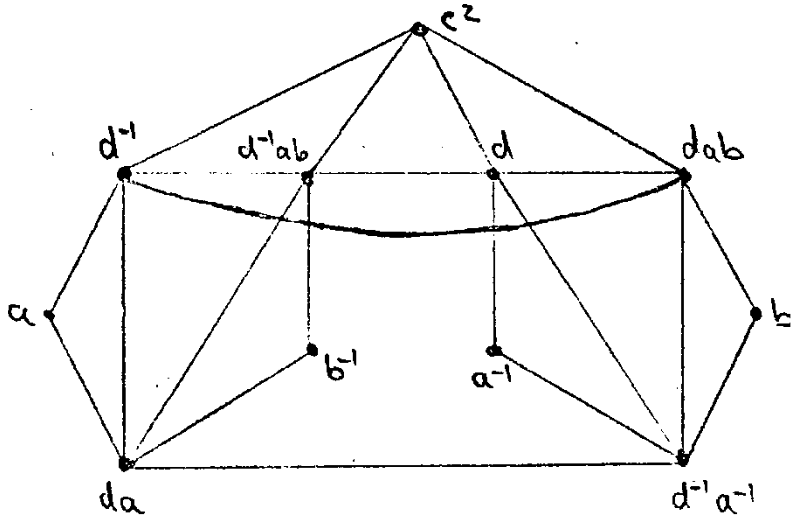


Abb. 61

$Y_1 = X'|_L \cup M \cup E(K,M)$. Der Graph X_0 ist nach Lemma 7.7. in der Klasse $R_{2,6}$. Also bleibt $G_{0\Phi}$ unter $A_e(X)$ stabil. Ist $\Phi \in A_e(X)$, so ist $\Phi|_L \in A_e(X_0) = \{1, \alpha\}$, wobei $\alpha(a) = a^{-1}$, $\alpha(b) = b$ und $\alpha(c) = c^{-1}$ ist. Abb. 61 zeigt den Graphen Y_1. Aus der Struktur des Graphen Y_1 folgt nun, daß H unter $A_e(X)$ fest bleibt. Nach Satz 3.11. ist dann $c(G) = c(G,H) = 1$. *

15.15. LEMMA:

$G = (64.d) = \langle a,c,d \mid a^4 = c^2 = d^8 = e,\ d^{-1}ad = ac,\ d^{-1}cd = a^2c\rangle$,

$H = \{a,a^{-1},c,d,d^{-1},da,d^{-1}ac,dc,d^{-1}a^2c,d^2,d^{-2},a^2\} \Rightarrow c(G) = c(G,H) = 1$.

Beweis:

Sei $X = X(G,H)$. Abb. 62. zeigt den-Graphen $Y = X|_H$. Es ist $A_e(X)|_H = A(Y) = \{1\}$. Nach Satz 3.11. ist $c(G,H) = 1$

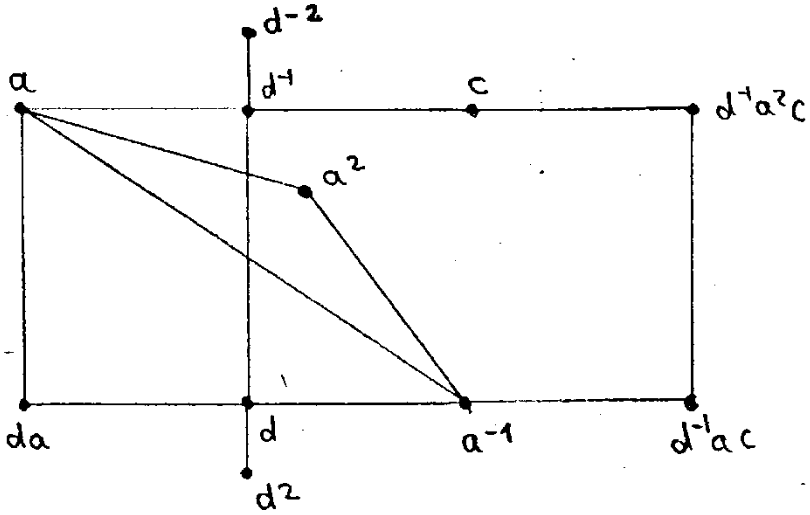


Abb. 62

15.16. LEMMA:

$G = (64.e) = \langle a,b,d \mid a^4=b^4=e,\ d^4a^2,\ d^{-1}ad=ab^2,\ d^{-1}bd=ab^{-1}\rangle$

$H.= \{a,a^{-1},b,b^{-1},d,d^{-1},da,d^{-1}ab^2,db,d^{-1}ab^{-1},b^2\} \Rightarrow\ c(G) = c(G,H) = 1$.

Beweis:

Sei $X = X(G,H)$. Abb. 63 zeigt den Graphen $Y = X|_H$.

Es ist $A_e(X)|_H = A(Y) = \{1_H\}$. Nach Satz 3.11. ist $c(G,H) = 1$

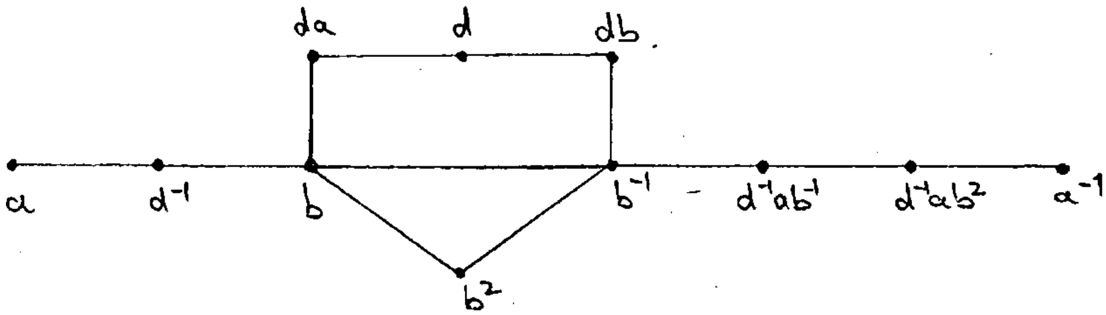


Abb. 63

5.17. LEMMA:

$G = (72.a) = \langle a,b,d \mid a^4=d^9=e, b^2=a^2, b^{-1}ab=a^{-1}, d^{-1}ad=b, d^{-1}bd=a \rangle$,

$H = \{a,a^{-1},d,d^{-1},d^2,d^{-2},d^2a,d^{-2}b^{-1},d^2ab,d^{-2}a,d^3b,d^{-3}b^{-1}\} \Rightarrow c(G) = c(G,H) = 1$.

Beweis:

Sei $X = X(G,H)$. Abb. 64 zeigt den Graphen $Y = X|_H$. Aus der Struktur des Graphen Y folgt, daß $A_e(X)|_H = \{1\}$ ist. Dann ist $c(G) = c(G,H) = 1$ nach Satz 3.11.

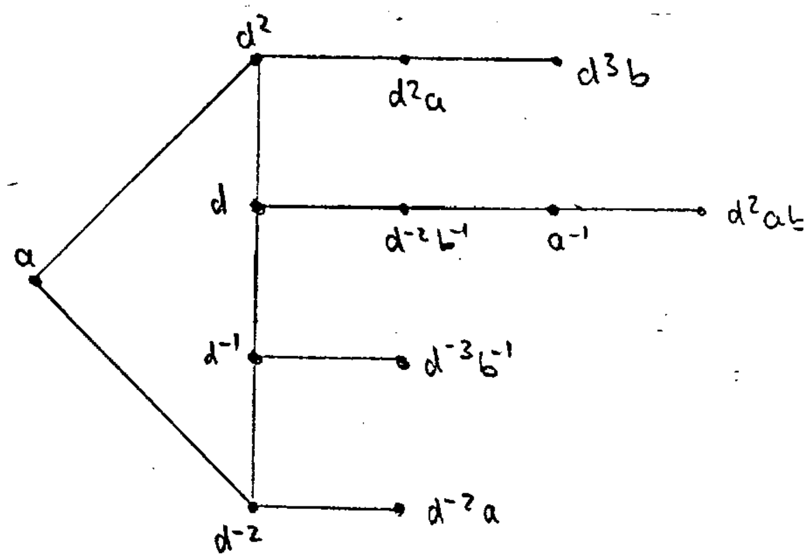


Abb.64

15.18. LEMMA:

$G = (75.a) = \langle a,b,d \mid a^5=b^5=d^3=e, d^{-1}ad=b, d^{-1}bd=a^{-1}b^{-1} \rangle$,

$H = (\langle a,b \rangle - \{e,b,b^{-1}\}) \cup \{d,d^{-1},db,d^{-1}a^{-1},da^2,d^{-1}a^2b^2\} \Rightarrow c(G) = c(G,H) = 1$.

Beweis:

Sei $L = \langle a,b \rangle$. Dann ist $L \cong Z_5^2$. Sei $x = X(G,H)$. Aus Lemma 7.7. folgt nun, daß L unter $A_e(X)$ stabil bleibt. Dann bleibt auch die Menge $K = \{b,b^{-1},d,d^{-1},db,d^{-1}a^{-1},da^2,d^{-1}a^2b^2\}$ unter $A_e(X)$ stabil. Abb. 65 zeigt den Graphen $Y = X|_H$.

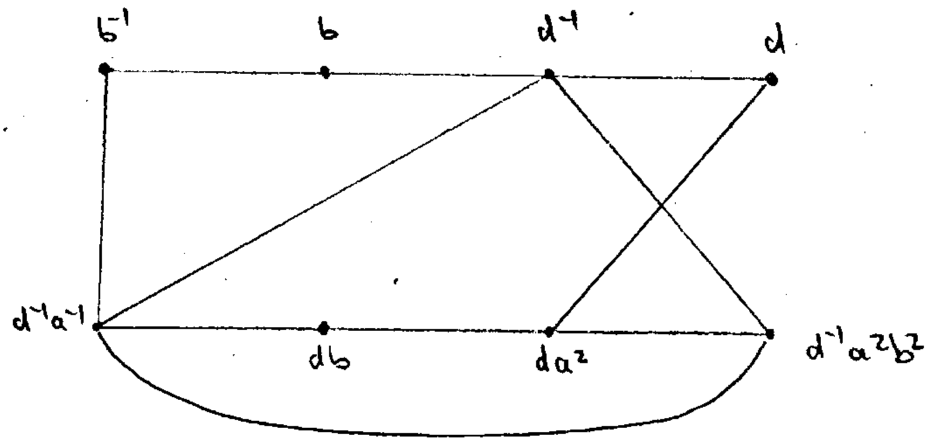


Abb. 65

Aus der Struktur des Graphen folgt, daß die Ecken da^2 und $d^{-1}a^2b^2$ unter $A_e(X)$ fest bleiben. Sei $\Phi \in A_e(X)$, so daß $\Phi|_K \neq 1$ ist. Dann ist: $\Phi|_K = \langle b,b^{-1}\rangle \langle d,db\rangle \langle d^{-1},d^{-1}a^{-1}\rangle$.

Sei $N_1(x) = N(X, H \cap L)$. Dann ist:

$N_1(d) = \{a^{-1},a^2b^2\}$ $N_1(d^{-1}) = \{a^2\}$

$N_1(db) = \{a,a^{-2}b^2\}$ $N_1(d^{-1}a^{-1}\} = \{a^2b^{-1}\}$

$N_1(da^2)= [a^2b^{-2},a^{-2}b^{-2}\}$ $N_1(d^{-1}a^2b^2\} = \{a^{-2}, a^{-2}b\}$

Also ist $\Phi(a^2) = a^2b^{-1}$ und $\Phi(a^2b^2) \in \{ a,a^{-2}b^2\}$.

Da $\{b,b^{-1}\}$ unter $A_e(X)$ stabil bleibt, bleibt auch $\{b^2,'b^{-2}\}$ nach Satz 3.16. unter $A_e(X)$ stabil. Also ist $\Phi(a^2b^2) = \Phi(a^2)\, \Phi_{a^2}(b^2) \in \{a^2b,a^2b^2\}$. Das ist aber ein Widerspruch. Also ist $A_e(X)|_H = \{1\}$. Dann ist $c(G) = c(G,H) = 1$ nach Satz 3.11.

15.19. LEMMA:

$G = (80.a) = \langle a,b,c,d,s \mid a^2 =b^2 =c^2 =d^2 =s^5 =e,s^{-1}as=b,s^{-1}bs=c, s^{-1}cs=d,s^{-1}ds=abcd\rangle$,

$H = \{s,s^{-1},s^2,s^{-2},sb,s^{-1}a,a,b,c,ab,ac\}$. $\Rightarrow$ $c(G) = c(G,H) = 1$.

Beweis:

Sei $X = X(G,H)$. Abb. 66 zeigt den Graphen $Y = X|_H$. Sei $K = \{s,s^{-1},a,b\}$. Dann folgt aus der Struktur des Graphen Y, daß K unter $A_e(X)$ fest bleibt. Da $\langle K\rangle = G$ ist, ist nach Satz 3.11. $c(G) = c(G,H) = 1$.

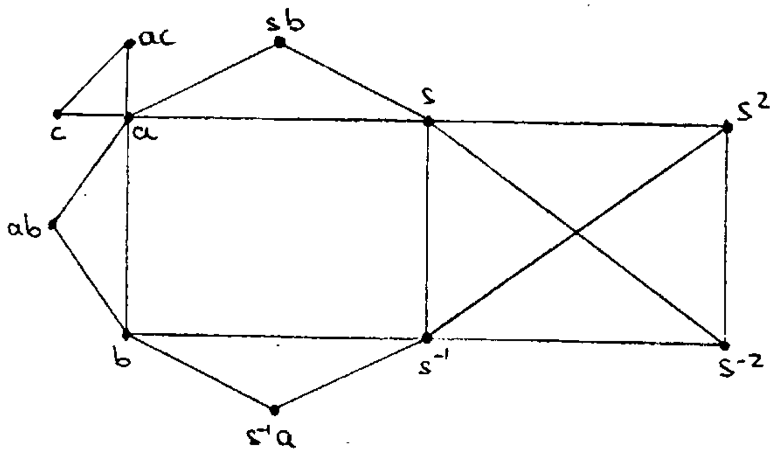


Abb.66

15.20. LEMMA:

Sei G eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung 81. Dann ist $c(G) = 1$.

Beweis: [Im 6,Theorem 2]

15.21. LEMMA:

Sei G eine nichtabelsche Erweiterung der Gruppe Z_3^3 durch die Gruppe Z_p, wobei $p \geq 5$ eine. Primzahl ist. Dann ist $p = 13$ und $c(G) = 1$.

Beweis:

G ist semidirektes Produkt von Z_3^3 mit Z_p. Sei $G = \langle Z_3^3, d \rangle$, wobei $d^p = e$ ist. Sei δ der von d auf Z_3^3 induzierte Automorphismus. Dann ist $f(\delta) \in \{1,3,9\}$ und $w(\delta) \in \{26,24,18\}$. Da $p \mid w(\delta)$ ist, ist $p = 13$. Nach [Im 6, Lemma 3] ist $c(G) = 1$.

16. Der Cayleyindex von Erweiterungen von kleinen Gruppen, die keine GRR besitzen

16.1. LEMMA:

Die Gruppe G_1 sei Erweiterung der Gruppe DH(3) durch die Gruppe Z_p wobei p eine Primzahl ist. Ist $o(G_1) > 32$, so ist $G_1 = DH(3) \times Z_p$ und $c(G_1) = 1$.

Beweis:

Sei $o(G_1) > 32$. Dann ist $p \geq 7$. Sei $G = (6.2) = DH(3) = \langle a,d \mid a^3 = d^2 = e,\ d^{-1}ad = a^{-1}\rangle$.

Dann ist $e(G) = \exp(Aut(G)) = 6$.

Sei $b \in G_1 - G$, so daß $b^p = e$ ist, und ß der von b auf G induzierte Automorphismus.

Dann ist $o(ß) \in \{1,p\}$. Da $o(ß) \mid e(G)$ ist, ist ß = 1.

Also ist $G_1 = DH(3) \times Z_p = SPC(3,2p;2)$. Dann ist $c(G_1) = 1$ nach Satz 14.8.

16.2. LEMMA:

Die Gruppe G_1 sei Erweiterung der Gruppe DH(4) durch die Gruppe Z_p, wobei p eine Primzahl ist. Ist $o(G_1) > 32$, so ist $G_1 = DH(4) \times Z_p$ und $c(G_1) = 1$.

Beweis:

Sei $o(G_1) > 32$. Dann ist $p \geq 5$. Sei $G = (8.4) = DH(4) = \langle a,d \mid a^4 = d^2 = e,\ d^{-1}ad = a^{-1}\rangle$.

Dann ist $e(G) := \exp(Aut(G)) = 4$. Sei $b \in G_1 - G$, so daß $b^p = e$ ist, und ß der von b auf G induzierte Automorphismus. Dann ist $o(ß) \in \{1,p\}$ und $o(ß) \mid e(G)$. Also ist ß = 1.

Dann ist $G = DH(4) \times Z_p = SPC(4,2p;3)$ und $c(G_1) = 1$.

16.3. LEMMA:

Die Gruppe G_1 sei Erweiterung der Gruppe DH(5) durch die Gruppe Z_p, wobei p eine Primzahl ist. Ist $o(G_1) > 32$, so ist $c(G_1) = 1$ und es ist

$G_1 = DH(5) \times Z_p$, $p \geq 5$ oder

$G_1 = (50.a) = \langle a,b,d \mid a^5=b^5=d^2=e,\ dad=a^{-1},\ dbd=a^{-1}b\rangle$.

Beweis:

Sei $o(G_1) \geq 32$. Dann ist $p \geq 5$. Sei $G = (10.2) = DH(5) = \langle a,d \mid a^5 = d^2 = e,\ dad = a^{-1}\rangle$.

Sei $b \in G_1 - G$ und ß der von b auf G induzierte Automorphismus.

Es ist $e(G) := \exp(Aut(G)) = 20$.

1. Sei $p \geq 7$. Dann kann man o.B.d.A. annehmen, daß $b^p = e$ ist. Dann ist $o(ß) \in \{1,p\}$. Da $o(ß) \mid e(G)$ ist, ist $ß = 1$. Dann ist $G_1 = DH(5) \times Z_p = SPC(5,2p;4)$ und $c(G_1) = 1$ nach Satz 14.8.
2 Sei $p = 5$. Dann kann man o.B.d.A. annehmen, daß $b^5 \in \{e,a\}$ ist.
   Ist $b^5= a$, so ist $o(ß) = 25$. Da dies nicht möglich ist, ist $b^5 = e$. Dann ist $o(ß) \in \{1,5\}$.
   a) Ist $o(ß) = 1$, so ist $G_1 = DH(5) \times Z_5 = SPC(5,10;4)$ Dann ist $c(G_1) = 1$ nach Satz 14.8.
   b) Ist $o(ß) = 5$, so ist o.B.d.A. $ß(d) = da$ und $ß(a) = a$ Dann ist:
   $G_1 = \langle a,d,b \mid a^5=d^2=b^5=e, dad=a^{-1}, b^{-1}db=da\rangle=(50.a)$. Nach Satz 12.21 ist dann $c(G_1)=1$.

16.4. LEMMA:

Die Gruppe G_1 sei Erweiterung der Gruppe $G = (12.4) = A_4$ durch die Gruppe Z_p, wobei p eine Primzahl ist. Ist $o(G_1) > 32$, so ist $c(G_1) = 1$ und $= A_4 \times Z_p$ mit $p \geq 3$.

Beweis:

Sei $o(G_1) > 32$. Es ist $G = \langle a,b,d \,]\, a^2 = b^2 = d^3 = e, d^{-1}ad = b, d^{-1}bd = ab^{-}\rangle$

Die Orbits von Aut(G) sind: $O_1 = \{d,d^{-1};da,d^{-1}ab;db,d^{-1}a;dab,d^{-1}b\}$, $O_2 = \{a,b,ab\}$.

Es ist $e(G) = \exp(Aut(G)) = 12$. Sei $s \in G_1 - G$ und φ der von s auf G induzierte Automorphismus. Ist $\varphi \neq 1$, so ist $p \mid o(\varphi) \mid e(G)$.

Ist $p \geq 5$, so ist G_1 semidirektes Produkt von G mit Z_p. Sei o.B.d.A. angenommen, daß $s^p = e$ ist. Dann ist $o(\varphi) \mid e(G)$. Also ist $\varphi = 1$ und $G_1 = A_4 \times Z_p$, $p \geq 5$.

Ist $p = 3$ und $\varphi = 1$, so ist $s^3 \in Z(G) = \{e\}$. Also ist dann $G_1 = A_4 \times Z_3$.

Ist $p = 3$ und $\varphi \neq 1$, so sei o.B.d.A. $s^3 \in \{e,d\}$. Ist $s^3=d$, so ist $o(\varphi) = 9$, was nicht möglich ist. Also ist $s^3 = e$. Dann ist $o(\varphi) = 3$. Da $|O_1|=8$ ist, kann man o.B.d.A. annehmen, daß $\varphi(d)=d$ ist. Da $\varphi \neq 1$ ist, ist $\varphi(a) \neq a$. Dann ist $\varphi(a) \in \{b,ab\}$. Wählt man nun $s_1 = sd$ bzw. $s_1 = sd^{-1}$, so ist $s_1^3 = e$ und für den von s_1 induzierten Automorphismus φ_1 gilt $\varphi_1 = 1$. Also ist dann wie oben $G_1 = A_4 \times Z_3$. Zusammengefasst ist $G_1 = A_4 \times Z_p$, $p \geq 3$.

Sei nun $L = Z_{2p} \times Z_2$. Dann ist G_1 Erweiterung der Gruppe L durch die Gruppe Z_3. Also ist $c(G_1) = 1$ nach Satz 12.33.

16.5. LEMMA:

Die Gruppe G_1 sei Erweiterung der Gruppe $G = (16.8) = GDCH(4)$ durch die Gruppe Z_p, wobei p eine Primzahl ist.

Ist $o(G_1)> 32$, so ist $c(G_1) = 1$ und G_1 eine der Gruppen $(16.8) \times Z_p$ mit $p \geq 3$ oder $(48.c) = \langle a,b,d,s \mid a^4 =s^3=e, b^2 =d^2 =a^2, b^{-1}ab=a^{-1}, s^{-1}as = b, s^{-1}bs =ab\rangle$

Beweis:

Sei $o(G_1) > 32$. Dann ist $p\geq 3$. Es ist $G = <a,b,d \mid a^4 = d^2= e, b^2 = a^2,b^{-1}ab = a^{-1},dbd=b^{-1} >$

Da $p \geq 3$ ist, ist G_1 semidirektes Produkt von G mit Z_p.

Sei $s\in G_1$-G, so daß $s^p = e$ ist. Sei σ der von S auf G induzierte Automorphismus. Ist $\sigma\neq 1$, so ist $p \mid o(\sigma)$. Es ist e(G):= exp(Aut(G)) = 12 und o(σ) (e(G).

a) Ist σ = 1, so ist $G_1 = G \times Z_p$. Sei dann L = <a,d,s>.

Dann ist $L = Z \times Z_2$ und G_1 Erweiterung der Gruppe L durch die Gruppe Z_2.

Dann ist $c(G_1) = 1$ nach Satz 12.21.

b) Ist σ ≠ 1, so ist p = 3. Die Orbits von Aut(G) sind:

$O_1 = \{a,a^{-1},b,b^{-1},ab,ab^{-1}\}$, $O_2 = \{da,da^{-1}\}$, $O_3 = \{d,da^2,db,da^2b,dab,dab^{-1}\}$, $O_4 = (a^2j$.

Man kann nun o.B.d.A. annehmen, daß σ(a) = b, σ(b) = ab und $\sigma(d) = dab^{-1}$ ist.

Dann ist

$G_1 =<a,b,d,s|a^4=d^2=s^3=e,b^2=a^2,b^{-1}ab=a^{-1},dbd=b^{-1}, s^{-1}as=b, s^{-1}bs=ab, s^{-1}ds=da^{-1}b>$

$= <a,b,d,s\mid a^4=s^3=e,b^2= d^2=a^2,b^{-1}ab=a^{-1},dbd=b^{-1},\ldots\ldots\ldots> = (48.c)$.

Dann ist $c(G_1) = 1$ nach Lemma 15.7.

16.6. LEMMA:

Die Gruppe G_1 sei Erweiterung der Gruppe G = (16.11) = SPC(8,2;5) durch die Gruppe Z_p, wobei p eine Primzahl ist.

Ist $o(G_1)> 32$, so ist $c(G_1)=1$ und $G_1 = (16.11) \times Z_p$ = SPC(8,2p;5), $p \geq 3$.

Beweis:

Sei $o(G_1)> 32$. Dann ist $p\geq3$. Es ist $G =<a,b|a^8= b^2= e, bab = a^5>$ und e(G):=exp(Aut(G))=8.

Da $p\geq3$ ist, ist G_1 semidirektes Produkt von G mit Z_p. Sei $s\in G_1$ - G, so daß $s^p = e$ ist, und

σ der von s auf G induzierte Automorphismus.

Ist σ ≠1, so ist $p = o(\sigma) \mid e(G)$. Also ist σ = 1. Dann ist $G_1 = (16.11) \times Z_p$ = SPC(8,2p;5) und $c(G_1) = 1$ nach Lemma 14.8.

16.7. LEMMA:

Die Gruppe G_1 sei Erweiterung der Gruppe G = (18.5) = GDH(3,3) durch die Gruppe Z_2. Dann ist $c(G_1) = 1$.

Beweis:

Es ist $G = <a,b,d \mid ,a^3 = b^3 = d^2 = e, dad = a^{-1}, dbd = b^{-1}>$. Sei $s\in G_1$ - G. Dann kann man o.B.d.A. annehmen, daß $s^2 \in \{e,d\}$ ist. Sei σ der von s auf G induzierte

Automorphismus. Die Orbits von Aut(G) sind $O_1 = \{a,b,ab,ab^{-1}\}$, $O_2 = [d\}<a,b>$.

Da $|O_2| = 9$ ist, kann man o.B.d.A. annehmen, daß σ(d) = d ist. Ferner kann man o.B.d.A. annehmen, daß σ(a) ∊ [a,b} ist.

1) Sei $s^2 = e$. Dann ist $\sigma^2 = 1$.

a) Sei σ(a) = a. Dann kann man o.B.d.A. annehmen, daß σ(b)∊ $\{b,b^{-1}\}$ ist.

Ist σ(b) = b, so ist $G_1 = G \times Z_2$. Sei dann L = <a,b,s>. Dann ist $L = Z_6 \times Z_3$ und G_1 Erweiterung der Gruppe L durch die Gruppe Z_2. Also ist $c(G_1) = 1$ nach Lemma 14.8.

Ist <S(b) = b, so sei U = <a,b,s>. Dann ist U = (18.3) = SPC(3,6;2) und c(U) = 1 nach Lemma 14.8. Da G_1:U = 2 ist, ist $c(G_1) = 1$ nach Satz 9.11.

b) Sei σ(a) ≠ b. Dann ist σ(b) = a. Sei U = <a,b,s>. Man überlegt sich leicht, daß dann U = (18.3) = SPC(3,6;2) ist. Also ist wie oben $c(G_1) = 1$.

2) Sei $s^2 = d$. Dann ist σ^2= inv. Ferner ist o.B.d.A. σ(a) = b und σ (b) = a. Also ist dann $G_1 = <a,b,s \mid a^3 = b^3 = s^4 = e, s^{-1}as = b^{-1}, s^{-1}bs = a^{-1}> = (36.b)$.

Dann, ist $c(G_1) = 1$ nach Lemma 15.2.

16.8. LEMMA:

Die Gruppe G_1 sei Erweiterung der Gruppe G = (18.5) = GDH(3,3) durch die Gruppe Z_p, wobei p ≥ 3 eine Primzahl ist. Dann ist $c(G_1) = 1$.

Beweis:

Es ist $G =<a,b,d\ ]\ a^3 = b^3 = d^2 = e, dad=a^{-1}, dbd=b^{-1}>$. Es ist exp(Aut(G))|24. Sei $s \in G_1 – G$.

1) Sei p ≥ 5. Dann ist die Erweiterung direktes Produkt von G und Z_p. Also ist $c(G_1) = 1$ nach Satz 12.21.

2) Sei p = 3. Dann kann man o.B.d.A. annehmen, daß s^3 ∊ <a,b> ist.

Sei σ der von s auf G induzierte Automorphismus. Dann ist σ(<a,,b>) = <a,b>.

Sei U =<a,b,s>. Dann ist |U| = 27 und G_1:U = 2.

Ist U abelsch, so ist $c(G_1) = 1$ nach Satz 12.21. Ist U nichtabelsch, so ist U eine der Gruppen (27.4), (27.5). Ist U = (27.4), so ist $c(G_1) = 1$ nach Lemma 16.22. Ist U = (27.5), so ist c(U) = 1 nach Lemma 14.8. Dann ist $c(G_1) = 1$ nach Satz 9.11.

16.9. LEMMA:

Die Gruppe G_1 sei Erweiterung der Gruppe G = (24.7) = Q x Z_3- durch die Gruppe Z_2. Dann ist $c(G_1) = 1$.

Beweis:

Es ist $G = <a,b,c \mid a^4 = c^3 = e, b^2 = a^2, b^{-1}ab = a^{-1}>$. Sei G_0 = <a,b>. Dann ist G_0 = Q.

Sei s ∊ G_0 - G und σ der von s auf G induzierte Automorphismus. Dann kann man o.B.d.A. annehmen, daß $s^2 \in G_0$ ist. G_0 bleibt unter σ stabil, und es ist σ(c)-∈ $\{c,c^{-1}\}$. Es gibt nun ein x ∈ {a,b,ab }, so daß σ(x) ≠ x,x^{-1} ist. Man kann annehmen, daß x = a ist. Ist σ(a) = a^{-1}, so sei s' = sb. Dann ist $s'^2 \in G_0$ und für den zu s' gehörenden Automorphismus σ' gilt:σ'(a)=a.

Also kann man o.B.d.A. annehmen, daß σ(a) = a ist.

Dann ist $s^2 \in$ Zentr(a) = <a>. Sei o.B.d.A. $s^2 \in \{e,a\}$. Sei U = <a,c,s>. Dann ist |U|= 24.

1) Ist σ(c) = c, so ist U abelsch und eine der Gruppen $Z_{12} \times Z_2$, $Z_8 \times Z_2$. Dann ist $c(G_1)$ = 1 nach Lemma 12.21.

2) Ist σ (c) = c, so ist U = $\langle a,c,s \mid a^4 = c^3=s^2 = e, scs=c^{-1}\rangle$ = SPC(12,2;7)=(24.8) oder U = $\langle c,s \mid a^8 = c^3 = e, s^{-1}cs=c^{-1}\rangle$ = SPC(3,8;2)=(24.14).
   Dann ist c(U) = 1 nach Lemma 14.8. und $c(G_1)$ = 1 nach Satz 9.8.

16.20. LEMMA:

Die Gruppe G_1 sei Erweiterung der Gruppe G = (24.7) = Q x Z_3 durch die Gruppe Z_p, wobei p ≥ 3 eine Primzahl ist. Dann ist $c(G_1)$ = 1.

Beweis:

Es ist G = $\langle a,b,c \mid a^4 = c^3=e, b^2 = a^2, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$. Sei G_0 = <a,b>. Dann ist G_0 = Q.

Sei s ∈ G_1 - G und σ der von s auf G induzierte Automorphismus. Dann ist σ[G_0] = G_0 und σ(c) = c.

1) Ist p ≥ 5, so ist die Erweiterung semidirektes Produkt. Sei o.B.d.A. s^p = e. Ist σ ≠ 1, so ist o(σ) = p. Da exp(Aut(G)) = 12 ist, ist also σ = 1. Dann ist G_1 = Q x Z_{3p}.
   Sei L = <a,c,s>. Dann ist L = Z_{12p} und. G_1 Erweiterung von L durch Z_2. Also ist c(G) = 1 nach Satz 12,21.

2) Sei p = 3. Dann kann man o.B.d.A. annehmen, daß $s^3 \in \{e,c\}$ ist.
   a) Ist o = 1, so ist G_1 = Q x Z_3^2 oder G_1 = Q x Z_9. Sei dann L = <a,c,s>. Dann ist L = $Z_{12} \times Z_3$ oder L = Z_{36}. G_1 ist Erweiterung von L durch Z_2. Also ist $c(G_1)$ = 1 nach Satz 12.21.
   b)Ist o ≠ 1, so kann man o.B.d.A. annehmen, daß o(a) = b und o(b) = ab ist. Dann ist G_1 eine der Gruppen
   (72.b) = $\langle a,b,c,s \mid a^4=c^3=s^3=e,b^2=a^2,b^{-1}ab=a^{-1},s^{-1}as=b, s^{-1}bs=ab\rangle$ = (24.12) x Z_3
   und
   (72.a) = $\langle a,b,s \mid a^4=s^9=e,b^2=a^2,b^{-1}ab=a^{-1},s^{-1}as=b,s^{-1}bs =ab\rangle$.
   Ist G_1 = (72.a), so ist $c(G_1)$ = 1, da nach Lemma 14.19. c((24.12)) = 1 ist.
   Ist G_1 = (72.b), so ist $c(G_1)$ = 1 nach Lemma 15.15.

16.21. LEMMA:

Die Gruppe G_1 sei Erweiterung der Gruppe (27.4) durch die Gruppe Z_2. Dann ist $c(G_1)=1$.

Beweis:

Es ist $G = (27.4) = \langle a,b,c \mid a^3 = b^3 = c^3 = e, b^{-1}ab = c\rangle$. Die Orbits von Aut(G) sind: $O_1 = G- \{c,c^{-1},e\}$, $O_2 = \{c,c^{-1}\}$. Die Erweiterung ist semidirektes Produkt. Sei $s \in G_1 - G$, so daß $s^2 = e$ ist. Sei σ der von s auf G induzierte Automorphismus.

1) Ist $\sigma = 1$, so ist $G_1 = G \times Z_2$. Sei dann $L = \langle a,c,s\rangle$. Dann ist $L = Z_6 \times Z_3$ und G_1 Erweiterung von L durch die Gruppe Z_3. Dann ist $c(G_1) = 1$ nach Satz 12.33.

2) Sei also $\sigma \neq 1$. Dann gibt es ein $x \in G$, so daß $\sigma(x) \notin \{x,x^{-1}\}$ ist. Man kann o.B.d.A. annehmen, daß $x = ab^{-1}c^{-1}$ ist. Sei $H = \{a,b,ac,abc,a^{-1},b^{-1},a^{-1}c^{-1},a^{-1}b^{-1}c\}$ und $X = X(G,H)$. Nach Lemma 14.20. ist dann X eine ARR von G und $A_e(X) = \{1,\alpha\}$, wobei $\alpha(a) = a^{-1}$, $\alpha(b) = abc$ und $\alpha(c) = c^{-1}$ ist. Die Elemente $e,ab^{-1}c,a^{-1}bc$ sind die einzigen, die unter α fest bleiben.

Also ist $\sigma\alpha(ab^{-1}c^{-1}) \neq \sigma(ab^{-1}c^{-1}) \neq \alpha\sigma(ab^{-1}c^{-1})$. Daraus folgt, daß $\sigma\alpha \neq \alpha\sigma$ ist. Da $G \in S_{2,1}$ ist, ist $c(G_1) = 1$ nach Lemma 8.8.

16.22. LEMMA:

Die Gruppe G_1 sei Erweiterung der Gruppe G = (27.4) durch die Gruppe Z_p, wobei $p \geq 3$ eine Primzahl ist. Dann ist $c(G_1) = 1$.

Beweis:

Es ist $G =\langle a,c,b \mid a^3 = c^3 = b^3 = e, b^{-1}ab = ac\rangle$.

1) Ist p = 3, so ist G_1 eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung 81 und $c(G_1) = 1$ nach Lemma 15.18.a.

2)Ist $p \geq 5$, so ist die Erweiterung semidirektes Produkt. Sei $s \in G_1 - G$, so daß $s^p = e$ ist. Sei σ der von s auf G induzierte Automorphismus. Die Orbits von Aut(G) sind $O_1 = G - (e,c,c^{-1}\}$, $O_2 = \{c,c^{-1}\}$. Also ist $\sigma(c) = c$. Sei $F_1 = F(\sigma) \cap O_1$ und $f_1 = [F_1|$.

Sei $W_1 = W(\sigma) \cap O_1$ und $w_1 = |W_1|$. Dann ist $f_1 \in \{0,6\}$ und $w_1 \in \{24,18\}$.

Ist $\sigma \neq 1$, so ist $p = o(\sigma)|w_1$. Also ist $\sigma =1$. Dann ist $G_1 = (27.4) \times Z_p$. Sei $L = \langle a,c,s\rangle$. Dann ist $L = Z_{3p} \times Z_3$ und G_1 Erweiterung der Gruppe L durch die Gruppe Z_3.

Nach Satz 12.33. ist $c(G_1) = 1$.

16.23. LEMMA:

Die Gruppe G_1 sei Erweiterung der Gruppe G = (32.15) = $Q \times Z_4$ durch die Gruppe Z_2. Dann ist $c(G_1) = 1$.

Beweis:

Es ist $G = \langle a,b,c \mid a^4 = c^4 = e, b^2 = a^2, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$. Sei $G_0 = \langle a,b\rangle$. Dann ist $G_0 = Q$.

Die Orbits von Aut(G) sind

$O_1=\{e,c\}(G_0-\{e,a^2\}), O_2=\{c,c^{-1}\}(G_0 - \{e,a^2\}), O_3=\{c,c^{-1},ca^2,c^{-1}a^2\}$, $O_4=\{a^2\}$, $O_5=\{c^2\}, O_6 =\{a^2c^2\}$.

1) Ist $G_1 = G \times Z_2$, so sei $L = Z_4^2 \times Z_2$. Dann ist G_1 Erweiterung von L durch Z_2. Also ist $c(G_1) = 1$ nach Satz 12.21.

2) Für ein $d \in G_1 - G$ sei $d^2 \in O_1 \cup O_2$. Sei o.B.d.A. $d^2 \in\{a,ac\}$. Sei $U=\langle d,c\rangle$.

   Dann ist $|U|= 32$ und $U \lhd G$.

   a)Ist $\delta(c) = c$, so ist $U = Z_8 * Z_4$.

   b)Ist $\delta(c) = c^{-1}$, so ist U = SPC(4,8;3).

   c)Ist $\delta(c) = a^2c$, so ist U = SPC(8,4;5) oder $U = \langle d,c \mid d^8 = c^4= e, d^{-1}cd = c^{-1}d^4\rangle$.

   d)Ist $\delta(c) = a^2c^{-1}$, so ist U = SPC(8,4;5) oder $U = \langle d,c \mid d^8 = c^4= e, d^{-1}cd = c^{-1}d^4\rangle$..

   Ist U abelsch, so ist $c(G_1) = 1$ nach Satz 12.21. Ist U nichtabelsch, so ist $c(U) = 1$, da U keine GDC-Gruppe und nicht die Gruppe $Q \times Z_4$ ist. Dann ist $c(G_1) = 1$ nach Satz 9.8.

3) Für alle $d \in G_1 - G$ sei $d \in G - (O_1 \cup O_2)$. Dann kann man durch geeignete Wahl von $d\in G_1 - G$ erreichen, daß o.B.d.A. $\delta(a) = a$ ist. Sei $U = \langle a,c,d\rangle$. Dann ist $|U| = 32$ und $U \lhd G_1$. Man kann nun o.B.d.A. annehmen, daß $\delta(b)\in\{e,c,c^2\}$ ist. Ist $d^2 \neq c^2$ oder $\delta(c) = c^{-1}$, so ist U eine abelsche Gruppe oder eine nichtabelsche Gruppe mit $c(U) = 1$. Ist $d^2 = c^2$ und $\delta(c) = c^{-1}$, so ist $U = Q \times Z_4$. Dann kann man o.B.d.A. annehmen, daß $\delta(b) \in \{b,bc^2\}$ ist. Dann ist G_1 eine der Gruppen

   $(64,b) = \langle a,b,c,d \mid a^4=c^4=e,b^2=a^2,c^2=d^2,b^{-1}ab=a^{-1},d^{-1}cd=c^{-1}\rangle$

   $(64.c) = \langle a,b,c,d \mid a^4=c^4=e,b^2=a^2,c^2=d^2,b^{-1}ab=a^{-1}, d^{-1}cd=c^{-1},d^{-1}bd=bc^2\rangle$

   ist U abelsch, so ist $c(G_1) = 1$ nach Satz 12.21. Ist $c(U) = 1$, so ist $c(G_1) = 1$ nach Satz 9.8. Ist G_1 = (64.b), so ist $c(G_1) = 1$ nach Lemma 15.13. Ist G_1 = (64.c), so ist $c(G_1) = 1$ nach Lemma 15.14.

16.24. LEMMA:

Die Gruppe G_1 sei Erweiterung der Gruppe G = (32.15) = $Q \times Z_4$, durch die Gruppe Z_p, wobei $p \geq 3$ eine Primzahl ist. Dann ist $c(G_1) = 1$

Beweis:

Es ist $G = \langle a,b,c \mid a^4 = c^4 = e,\ b^2 = a^2,\ b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$. Die Orbits von Aut(G) sind:

$O_1=\{a,b,ab,ac^2,bc^2,abc^2\}^{\pm 1}$, $O_2=cO_1$, $O_3=\{c,c^{-1},ca^2,c^{-1}a^2\}$, $O_4 = \{a^2\}$, $O_5 = \{c^2\}$, $O_6 = \{a^2c^2\}$.

Die Erweiterung ist semidirektes Produkt. Sei $d \in G_1 - G$, so daß $d^p = e$ ist.

Sei δ der von d auf G induzierte Automorphismus.

Ist $\delta = 1$, so sei $L = \langle a,c,d\rangle$. Dann ist $L = Z_{4p} \times Z_4$ und G_1 Erweiterung von L durch die Gruppe Z_2.

Sei also $\delta \neq 1$. Dann ist $0(\delta) = p$. Da exp(Aut(G)) = 12 ist, ist p = 3.

Es ist nun $\delta(c) = c$ und $\delta(a) \notin \{a,a^{-1},ac^2,a^{-1}c^2\}$. Sei also o.B.d.A. $\delta(a) = b$.

Dann ist $\delta(b) \in \{ab,ab^{-1},abc^2,ab^{-1}c\}$. Sei $H = \{a,a^{-1},b,b^{-1},c,c^{-1},ac,a^{-1}c^{-1},abc,ab^{-1}c^{-1},c^2\}$

Sei X = X(G,H). Dann ist nach Lemma 14.22. $X \in S_{3,1}$ und $A_e(X) = \{1,\alpha\}$, wobei $\alpha(a) = a^{-1}$, $\alpha(b) = b$ und $\alpha(c) = c^{-1}$ ist. Es ist nun $\delta \neq 1$. Weiter ist $\alpha\delta\alpha(a) = \alpha\delta(a^{-1}) = b^{-1}$. Also ist $\alpha\delta\alpha(a) \neq \delta(a)$ und $\alpha\delta\alpha(a) \neq \delta^{-1}(a)$. Daraus folgt, daß $\alpha\delta\alpha \neq \delta$ und $\alpha\delta\alpha \neq \delta^{-1}$ ist. Also sind die Voraussetzungen von Satz 8.14. erfüllt und es ist $c(G_1) = 1$ nach Satz 8.14.

16.25. SATZ:

Sei G eine nichtabelsche, nicht verallgemeinert dizyklische Gruppe mit $o(G) \leq 32$ und $c(G) \geq 2$. Die Gruppe G_1 sei Erweiterung von G durch die Gruppe Z_p, wobei $p \geq 2$ eine Primzahl ist. Ist $o(G_1) > 32$, so ist $c(G_1) = 1$.

Beweis:

Die nichtabelschen,nicht verallgemeinert dizyklischen Gruppen mit $o(G) \leq 32$ und $c(G) \geq 2$ sind nach Satz 14.38. die Gruppen

(6. 2) = DH(3), (8. 4) = DH(4), (10. 2) =DH(5), (12.4) = A_4, (16.8) = GDCH(4),

(16.11) = SPC(8,2;5), (18.5) = GDH(3,3), (24.7) = $Q \times Z_3$, (27.4), (32.15) = $Q * Z_4$.

Die Behauptung folgt nun aus den Lemmas dieses Kapitels.

IV. DER HAUPTSATZ ÜBER DAS GRR-PROBLEM FÜR AUFLÖSBARE GRUPPEN

17. Der Hauptsatz

17.1. SATZ:

Sei G eine nichtabelsche, nicht verallgemeinert dizyklische auflösbare Gruppe. Ist dann G keine von zehn Ausnahmegruppen, deren Ordnung sämtlich ≤ 32 ist, so besitzt G eine GRR.

Die Ausnahmegruppen sind:

(6.2) = DH(3)	(8.4) = DH(4)
(10.2)- = DH(5)	(12.4) = A_4
(16.8) = GDCH(4)	(16.11) = SPC(8,2;5)
(18.5) = GDH(3,3)	(24.7) = Q x Z_3
(27.4)	(32.15) = Q x Z_4

Für alle Ausnahmegruppen G ist c(G) = 2.

Beweis:

I)Ist o(G) ≤ 32, so folgt die Aussage aus Satz 14.38.

II) Sei also o(G) > 32.

Sei K = (U_1,U_2,.....,U_m) eine Kompositionsreihe der Gruppe G.

Sei i ∈ {2,3,....,m-1} so gewählt, daß gilt:

1) o(U_{i+1}) > 32.

2) Unter den Gruppen U_j,, i+1 ≤ j ≤ m, gibt es keine abelschen und keine GDC-Gruppen.

3) Es ist U_i abelsch oder U_i eine GDC-Gruppe oder o(Ui) ≤ 32.

Dann ist i durch die Bedingungen 1) - 3) eindeutig bestimmt.

a) Ist U_i abelsch, so ist c(U_{i+1}) = 1 nach Satz 12.35.

b) Ist U_i GDC-Gruppe, so ist c(U_{i+1}) = 1 nach Satz 13.4.

c) Ist o(U_i) ≤ 32 und c(U_i) = 1, so ist c(U_{i+1}) = 1 nach Satz 9.11.

d) Ist o(U_i) ≤ 32, c(U_i) ≥ 2 und U_i eine nichtabelsche, nicht verallgemeinert dizyklische Gruppe, so ist c(U_{i+1}) = 1 nach Satz 16.25.

Also ist stets c(U_{i+1}) = 1. Durch mehrfache Anwendung von Satz 9.11. folgt nun, daß c(G) = 1 ist.

Zusammenfassung der Ergebnisse

über reguläre graphische Darstellung von auflösbaren Gruppen

Die Menge aller auflösbaren Gruppen wird in fünf Klassen eingeteilt. Jeder dieser Klassen läßt sich eine Zahl c zuordnen, so daß für alle Gruppen G aus der Klasse - bis auf endlich viele Ausnahmegruppen - gilt: c(G) = c.

Die fünf Klassen und ihre Ausnahmegruppen sind:

I) GQ-Gruppen Q x Z_2^n, n∊ ℕ: c = 4

Ausnahmegruppen:

G= (8.5) = Q mit c(G) = 16 G= (16.7) = Q * Z_2 mit c(G) = 16

II) GDC-Gruppen, die keine GQ-Gruppen sind: c = 2

Ausnahmegruppen:

G= (12. 5) = DC(6) mit c(G) = 4 G= (16.10)= GDC(4,2) mit c(G) = 4

G= (16.14)= DC(8) mit c(G) = 4 G= (20.5) = DC(10) mit c(G) = 4

III) Abelsche Gruppen G mit exp(G) > 2: c = 2

Ausnahmegruppen:

G= (8. 2) = Z_4 x Z_2 mit c(G) = 6 G= (9. 1) = Z_3^2 mit c(G) = 8

G= (16.2) = Z_4 x Z_2^2 mit c(G) = 8 G= (16. 3) = Z_4^2 mit c(G) = 4

G= (27.1)= Z_3^3 mit c(G) = 12

IV) Abelsche Gruppen L = Z_2^n, n ∊ ℕ: c=1

Ausnahmegruppen:

L= (4.1) = Z_2^2 mit c(L) = 2 L= (8.1) = Z_2^3 mit c(L) = 6

L= (16.1) = Z_2^4 mit c(L) = 8

V) Nichtabelsche, nicht-GDC-Gruppen: c=1

Ausnahnegruppen:

G= (6.2) = DH(3) mit c(G) =2

G= (8.4) = DH(4) mit c(G) =2

G= (10.2) = DH(5) mit c(G) =2

G= (12.4) = A_4 mit c(G)= 2

G= (16.8) = GDCH(4) mit c(G)= 2

G= (16.11) = SPC(8,2;5) mit c(G)=2

G= (18.5) = GDH(3,3) mit c(G)=2

G= (24.7) = Q x Z_3 mit c(G)=2

G= (27.4) mit c(G)=2

G= (32.15) = Q x Z_4 mit c(G)=2,

ANHANG 1: Tabellen

Legende zu den Tabellen 1 - 4

TABELLE 1:

Spalte 1	Gruppennummer
2	Gruppenbezeichnung
3	Cayleyindex c(L)
4	Standarderzeugendensystem = ES einer Standardrepräsentation
5	H^+, so daß für $H:= H^+ \cup (H^+)^{-1}$ gilt c(L,H) = c(L)
6	Mächtigkeit |H| von H
7	α(H)
8	n_2, so daß $L \in S_{2,n2}$ ist
9	n_3, so daß $L \in S_{3,n3}$ ist
10	n_4, so daß $L \in S_{m,n4}$ für alle $m \geq 4$ ist
11	Nummer des Lemmas, in dem c(L) bestimmt wird

TABELLE 2 :

Spalte 1	Gruppennummer
2	Gruppenbezeichnung
3	Cayleyindex c(G)
4	Erzeugendensystem der Gruppe
5	Erzeugende Relationen der Gruppe
6	H^+, so daß für $H:= H^+ \cup (H^+)^{-1}$ gilt c(G,H) = c(G)
7	Mächtigkeit |H| von H
8	Nummer des Lemmas in dem c(G) bestimmt wird.

TABELLE 3:

Spalte 1	Gruppennummer
2	Gruppenbezeichnung
3	Cayleyindex c(G) der Gruppe G
4	Erzeugendensystem der Gruppe
5	Erzeugende Relationen der Gruppe
6	H^+, so daß für $H := H^+ \cup (H^+)^{-1}$ gilt c(G,H) = c(G)
7	Mächtigkeit |H| von H
8	α(H)
9	n_2, so daß $L \in S_{2,n2}$ ist.
10	Zentrum Z(G) der Gruppe
11	Untergruppen U von G mit G : U = 2 und c(U) = 1
12	Nummer des Lemmas, in dem c(G) bestimmt wird

TABELLE 4 :

Spalte 1	Gruppennummer
2	Gruppenbezeichnung
3	Bezeichnung nach [Co-Mo 1, Table 1, p 134ff]
4	Bezeichnung nach [Ha-Se 1]

TABELLE 1: Die nicht zyklischen abelschen Gruppen, deren Ordnung ≤ 48 ist.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Grp-Nr	**Grp-Bez**	**c(L)**	**Std-ES**	**H^+, c(L,H)=c(L)**	**|H|**	**α(H)**	**n_2**	**n_3**	**n_4**	**Lemma**
4.1	(2,2)	2	a,b	a	1	0	0	0	1	10.2
8.1	(2,2,2)	6	a,b,c	a,b,c	3	0	0	0	2	10.3
8.2	(4,2)	6	a,b	a,b	3	0	0	0	2	10.13
9.1	(3,3)	8	a,b	a,b	4	1	0	0	2	10.14
12.1	(6,2)	2	a,b	a,b	3	0	2	1	4	10.12
16.1	(2,2,2,2)	8	a,b,c,d	a,b,c,d,ab,ac,bd	7	2	1	1	4	10.4
16.2	(4,2,2)	8	a,b,c	a,b,c,bc,a^2c,a^2	7	2	1	1	4	10.15
16.3	(4,4)	4	a,b	a,b,ab,a^2	7	2	1	1	4	10.16
16.4	(8,2)	2	.a,b	a,b	3	0	4	3	6	10.12
18.1	(6,3)	2	a,b	a,b,a^2,ab	8	3	2	1	5	10.17
20.1	(10,2)	2	a,b	a,b	3	0	6	4	8	10.12
24.1	(6,2,2)	2	a,b,c	a,b,c,ab,a^3	7	0	4	3	8	10.18
24.2	(12,2)	2	a,b	a,b	3	0	8	5	10	10.12
25.1	(5,5)	2	a,b	a,b,a,ab,ab	10	2	3	2	7	10.19
27. 1	(3,3,3)	12	a,b,c	a,b,c,ab,ac,bc	12	5	3	2	8	10.20

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Grp-Nr	**Grp-Bez**	**c(L)**	**Std-ES**	**H^+, c(L,H)=c(L)**	**|H|**	**α(H)**	**n_2**	**n_3**	**n_4**	**Lemma**
27. 2	(9,3)	2	a,b	a,b,ab,a	8	2	6	4	9	10.21
28. 1	(14,2)	2	a,b	a,b	3	0	10	7	12	10.12
32. 1	Z_2^5	1	a,b,c,d,f	a,b,c,d,f,ab,ac,bc,df,abc,bcd,af	12	4	5	3	10	10. 5
32.2	(4,2,2,2)	2	a,b,c,d	a,b,c,d,ab,ac,ad,a^2b,bc	13	2	tl	3	9	10.22
32. 3	(4,4,2)	2	a,b,c	a,b,c,ab,bc,a^2	10	4	7	5	11	10.23
32.4	(8,2,2)	2	a,b,c	a,b,c,a^2,a^2b	8	0	7	5	11	10.37
32.5	(8,4)	2	a,b	a,a^2,a^3,b,ab,b^2	11	5	7	4	11	10.37
32,6	(16,2)	2	a,b	a,b	3	0	12	8	14	10.12
36.1	(6,6)	2	a,b	a,b,a^2,a^3,b^2,ab	ii	5	9	6	13	10.37
36. 2	(12,3)	2	a,b	a, b, a^2,a^3, ab	10	3	9	6	13	10.37
36. 3	(18,2)'	2	a,b	a,b	3	0	14	9	16	10.12
40. 1	(10,2,2)	2	a,b,o	a,b,c,a^2,a^2b	8	0	11	7	15	10.37
40.2	(20,2)	2	a,b '	a,b	3	0	16	11	18	10.12
44. 1	(22,2)	2	a,b	a,b	3	0	18	11	20	10.12
45.1	(15,3)	2	a,b	a,b,a^2,a^3,ba.	10	3	13	9	18	10.37

TABELLE 2: Die GDC-Gruppen, deren Ordnung ≤ 32 ist.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
GrpNr	**Grp-Bez**	**c(G)**	**ES**	**Erzeugende Relationen**	**H^+, c(G,H) = c(G)**	**|H|**	**Lemma**
8.5	DC(4)	16	a,b	$a^4 = e$, $b^2=a^2$, $b^{-1}ab=a^{-1}$	a	2	11.1
12.5	DC(6)	4	a,b	$a^3=b^4= e$, $b^{-1}ab= a^{-1}$	a,b	4	11.8
16. 7	GDC(4,2)	16	a,b,c	$a^4=c^2=e, b^2=a^2$, $b^{-1}ab= a^{-1}$	a,b,c,a^2	6	11.2
16.10	GDC(4,2)	4	a,b	$a^4 =b^4 =e$, $b^{-1}ab= a^{-1}$	a,b,ab	6	11.9
16.14	DC(8)	4	a,b	$a^8= e$, $b^2= a^4$, $b^{-1}ab= a^{-1}$	a,b	4	11.10
20. 5	DC(10)	4	a,b	$a^5= b^4= e$, $b^{-1}ab= a^{-1}$	a,b	4	11.11
24. 9	GDC(6,2)	2	a,b	$a^6=b^4=e$, $b^{-1}ab= a^{-1}$	a,b,ba,ba^3	8	11.12
24.15	DC(12)	2	a,b	$a^{12}= e$, $b^2= a^6$, $b^{-1}ab= a^{-1}$	a,b,ba,ba^3	8	11.6'
28.4	DC(14)	2	a,b	$a^{14}=e,b^2=a^2$, $b^{-1}ab= a^{-1}$	a,b,ba,ba^3	8	11.6
32.9	GDC($\underline{4}$,2,2)	4	a,b,c,d	$a^4=c^2=d^2=e,b^2=a^2$, $b^{-1}ab= a^{-1}$	a,b,ab,ac,bc,bcd,c,d	14	11.3
32.12	GDC(4,$\underline{2}$,2)	2	a,b,c	$a^4=b^4=c^2=e$, $b^{-1}ab= a^{-1}$	a,b,ba,bc,c	9	11.16
32.23	GDC(8,2)	2	a,b,c	$a^8= c^2=e$, $b^2= a^4$, $b^{-1}ab= a^{-1}$	a,b,ba,bc,c	9	11.14
32.29	GDC(8,2)	2	a,b	$a^8=b^4 = e$, $b^{-1}ab= a^{-1}$	a,b,ba,ba^3	8	11.7
32.35	GDC(4,4)	2	a,c,b	$a^4= c^4= e$, $b^2=a^2$, $b^{-1}ab= a^{-1}$	a,c,ac,b,ba,bc,c^2	13	11.15
32.51	DC(16)	2	a,b	$a^{16}= e$, $b^2= a^2$, $b^{-1}ab= a^{-1}$	a,b,ba,ba^3	8	11.6

TABELLE 3: Die nichtabelschen, nicht-GDC-Gruppen, deren Ordnung ≤ 32 ist.(1)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Grp-Kr	**Grp-Bez**	**c(G)**	**ES**	**Erzeugende Relationen**	**H^+**	**|H|**	**w**	**n_2**	**Z(G)**		**Lemma**
6. 2	DH(3)	2	a,d	$a^3=d^2=e$, $dad=a^{-1}$	d,da	2	0	0	{e}		14.1
8. 4	DH(4)	2 -	a,d	$a^4=d^2=e$, $dad=a^{-1}$	d,da	2	0	1	Z_2		14.2
10. 2	DH(5)	2	a,d	$a^5=d^2=e$, $dad=a^{-1}$	d,da	2	0	2	{e}		14.3
12. 3	DH(6)	1	a,d	$a^6=d^2=e$, $dad=a^{-1}$	a,d,da,da3	5	2	1	Z_2		14.4
12. 4	A_4	2	a,b,d	$a^2=b^2=d^3=e$, $d^{-1}ad=b$, $d^{-1}bd=ab$	a,d	3	0	2	{e}		14.9
14.2	DH(7)	1	a,d	$a^7=d^2=e$, $dad=a^{-1}$	a,d,da,da^3	5	2	2	{e}		14.4'
16. 6	GDH(4,2)	1	a,d,c	$a^{-4}=d^2=c^2=e$, $dad=a^{-1}$	a,d,da,da^2c	5	0	2	Z_2^2		14.10
16. 8	GDCH(4)	2	a,b;d	$a^4=d^{2\prime}=e$, $b^2=a^2$, $b^{-1}ab=a^{-1}$,$d^{-1}bd=b^{-1}$	a,d,db,dab	5	0	2	Z_2		14.11
16. 9	-	1	a,c,d	$a^8=d^4=e$, $c=d^2$,$d^{-1}ad=a^{-1}c$	a,d,ad,a^2	6	2	2	Z_2^2		14.12
16.11	SPC(8,2;5)	2	a,b	$a^8=b^2=e$, $bab=a^{5,}$[No-Wa 1, Prop 3.1]	a,a^2,b	5	0	2	Z_4		14,13
16.12	DH(8)	1	a,d	$a^8=d^2=e$, $dad=a^{-1}$	d, da, da^2, da	4	0	3	Z_2		14.5
16.13	SPC(8,2;3)	1	a,b	$a^8=b^2=e$, $bab=a^3$	a,b,ba,ba^{-3}	5	2	3	Z_2		14.8
18.3	SPC(3,6;2)	1	a,b	$a^3=b^6=e$, $b^{-1}ab=a^{-1}$	b,b^2a,b^3a	5	1	4			14.8
18.4	DH(9)	1	a,d	$a^9=d^2=e$,$d^{-1}ad=a^{-1}$	d,da,da^3	3	0	5			14.6
18.5	GDH(3,3)	2	a,b,d	$a^3=b^3=d^2=e$,$dad=a^{-1}$,dbd=	a,d,da,db	5	0	3			14.14
20.3	DH(10)	1	a,d	$a^{10}=d^2=e$,$dad=a^{-1}$	d,da,da^3	3,	0	6			14.6
20.4	SPC(5,4;2)	1	a,b	$a^5=b4=e$, $b^{-1}ab=a^2$	b.b^2a	3	0	6			14.8
21.2	SPC(7,3;2)	1	a,b	$a^7=b^3=e$, $b^{-1}ab=a^2$	a,b,ba,ba^3	8	3	3			14.8
22.2	DH(11)	1	a,d	$a^{11}=d^2=e$, $dad=a^{-1}$	d,da,da^3	3	0	7			14.6
24.4	A_4 x Z_2	1	a,b,d	$a^2=b^2=d^6=e$, $d^{-1}ad=b$, $d^{-1}bd=ab$	a,d,bd^3	4	0	7			14.15
24. 5	GDH(6,2)	1	a,c,d	$a^6=c^2=d=e$, $dad=a^{-1}$	a,d,da,da^3,c	6	0	6		(12.3)	14.16
24. 6	SPC(12,2;7)	1	a,b	$a^{12}=b^2=e$,$bab=a^{-1}$	a,$ba^{5,}$b,ba^3	6	2	6			14.8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Grp-Kr	**Grp-Bez**	**c(G)**	**ES**	**Erzeugende Relationen**	**H^+**	**|H|**	**w**	**n_2**	**Z(G)**		**Lemma**
24.7	Q $*Z_3$	2	a,b,c	$a^4=c^3=e$, $b^2=a^2$,$b^{-1}ab=a^{-1}$	a,ac,bc	6	1	6			14.17
24. 8	SPC(12,2;5)	1	a,b	$a^{12}=b^2=e$, $bab=a^{-1}$	a,b,ba	5	2	7			14.8
24.10	DH(12)	1	a,d	$a^{12}=d^2=e$,$dad=a^{-1}$	d,da,da^3	3	0	8		(12.3)	14.6
24.11	S_4	1	a,b,c,d	$a^2 =b^2=c^3=d^2=e$, $c^{-1}ac=bc^{-1}$, $dcd=c^{-1}$, $dcd=c^{-1}$, $dbd=a$	b,d,dcb	3	0	8			14.18
24.12	-	1	a,b,d	$a^4=d^3=e$, $b^2=a^2$,$b^{-1}ab=a^{-1}$, $d^{-1}ad=b$, $d^{-1}bd=ab$	a,d,da^{-1}	6	1	6			14.19
24.13	GDCH(6)	1	a,b,d	$a^6=d^2=e$,$b^2=a^3$,$b^{-1}ab=a^{-1}$, $dbd=b^{-1}$	b,da,dba	5	1	7		(12.3)	14.19
24.14	SPC(3,S;2)	1	a,b	$a^3=b^8=e$,$b^{-1}ab=a^{-1}$	b,b^3,ba,b^2a	8	1	4			14.8
25.2	DH(13)	1	a,d	$a^{13}=d^2=e$,$dad=a^{-1}$	d,da,da^3	3	0	9			14.6
27.4	-	2	a,c,b	$a^3=c^3=b^3=e$,$b^{-1}ab=ac$	a,b,ac,abc	8	1	5			14.20
27.5	SPC(9,3;7)	1	a,b	$a^9=b^3=e$,$b^{-1}ab=a^7$	a,b,ba	6	1	7			14.8
23. 3	DH(14).	1	a,d	$a^{14}= d^2= e$, $dad= a^{-1}$	d,da,da^2	3	0	10		(14.2)	14.6
30.2	SPC(15,2;4)	1	a,b	$a^{15}=b^2=e$,$bab=a^{-1}$	a,b,ba	5	2	10			14.8
30.3	SPC(15,2,11)	1	a,b	$a^{15}=b^2=e$, $bab=a^{11}$	a,b,ba	5	2	10			14.8
30.4	DH(15)	1	a,d	$a^{15}=d^2= e$,$dad= a^{-1}$	d,da,da^3	3	0	11			14.6
32. 8	GDH(4,2,2)	1	a,d,b,c	$a^4= d^2= b^2= c^2= e$, $dad= a^{-1}$						(16.6)	9.6
32.10	GDCH(4,2)	1	a,b,c,d	$a^4=c^2= d^2=e$, $b^2= a^2$, $b^{-1}ab= a^{-1}$,$dbd=b^{-1}$						(16.6)	9.6
32.11	(16.9) x Z_2	1								(16.9)	9.7
32.13	(16.11) x Z_2	1	a,b,c	$a^4=b^4=c^2=e$,$b^{-1}ab = a^{-1}$	a,b,ba,ac,c	8					14.21
32.14	DH(4) x Z_4	1	a,d,c	$a^4=d^2=c^4=e$, $dad=a^{-1}$	d,dac,a,c,ac,a^2					(16.6), (16.9)	14.21
32.15	Q x Z_4	2	a,b,c	$a^4 =c^4 =e$, $b^2 =a^2$,$b^{-1}ab=a^{-1}$	a,b,c,ac,abc,c^2						14.22
32.16	-	1	a,b,d	$a^4 =b^2 =d^4 =e$, $dbd=ba^2$	a,b,d,d^2,db					(16.9)	14.23

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Grp-Kr	**Grp-Bez**	**c(G)**	**ES**	**Erzeugende Relationen**	**H^+**	**$\lvert H\rvert$**	**w**	**n_2**	**Z(G)**		**Lemma**
32.17.		1	a,b,d	$a^8=b^2=d^2= e$, $bdb=da^4$	a,ab,bda,b,d	8					14.24
32.18	-	1	a,c,d	$a^4=c^2=d^4=e$, $d^{-1}ad=ac$	a,d,ad,a^2,d^2, a^2c,c	10					14.25
32.19	SPC(8,4;5)	1	a,b	$a^8=b^4=e$,$b^{-1}ab=a^5$	a,a^2,b,ba,b^2	9					14.8
32.20	-	1	a,c,d	$a^8=c^2=d^2=e$,$dad=ac$	a,a^2,ad,d	7					14.26

TABELLE 3: Die nichtabelschen, nicht-GDC-Gruppen, deren Ordnung ≤ 32 ist.(2)

1	2	3	4	5	6	11	12
Crp-Hr	Grp-Bez	c(G)	ES	Erzeugende Relationen	H^+		**Lemma**
32.22	SPC(16,2;9)	1	a,b	$a^{16}=b^2=e$,$bab=a^9$	a,a^2,b,ba		14.8
32.23	GDH(3,2)	1	a,c,d	$a^8=c^2=d^2=e$, $dad=a^{-1}$		(16.6), (16.12)	9.8
32.24	(16.13) x Z_2	1	a,b,c	$a^8=b^2=c^2=e$, $bab=a^3$		(16.6), (16.13)	9.8
32.26	GDCH(8)	1				(16.6), (16.13)	9.8
32.27	-	1	a,c,d	$a^8=c^2=d^2=e$ $dad=a^{-1}c$	a,d,da,a,a	(16.6)	9.6
32.28	-	1	a,c,d	$a^8=c^2=e$, $d^2= a^{4,}$,$d^{-1}ad=a^{-1}c$	a,d,da,a,a^2,a^4		14.27
32.30	SPC(8,4;3)	1	a,b	$a^8= b^4= e$,$b^{-1}ab= a^3$	a,a^2,b,ba,b^2		14.8
32.31		1	a,c,d	$a^4 =c^4 =d^2 =e$, $dad=a^{-1}c$	a,c,da,d		14.28
32.32		1	a,b	$a^8=e$, $b^4=a^4$,$b^{-1}ab= a^{-1}$	a,b,ba,ba^3,b^2a^2		14.29
32.33		1				(16.6),(16.9)	9.8
32.34		1				(16.6)	9.6
32.36	GDCH(4,2)	1				(16.6),(16.9)	9.8
32.37		1	a,b,c,d	$a^4 =b^2=c^2 = e$, $d^2=a^2$, $d^{-1}ad = a^{-1,}d^{-1}bd=bc$	a,b,c,db,dab	(16.9)	14.30
32.38		1	a,b,c,d	$a^4=b^2=c^2=d^2=e$, $dad=ac$, $dbd=a^2b$	a,b,c,da,db	(16.6),(16.9)	14.31
32.39		1	a,b,d	$a^4 = b^4=d^2=e$, $dad=a^{-1}$, $dbd =-b^{-1}a^2$	a,b,d,ab,a^2,db	(16.6),(16.9)	14.32
32.40		1	a,b,d	$a^4 = b^4=e$, $d^2=b^2$,$d^{-1}ad=a^{-1}$, $d^{-1}bd=a^2b^{-1}$	a,b,ab,d,db,dab,b^2		14.33
32.41		1	a,d,b	$a^4 =d^4 =b^2 =e$, $bab=a^{-1}d^2$, $bdb=da^2$	a,d,b,a^2,d^2,ba,bd	(16.9)	14.34

32.42		1				(16.6)	9.6
32.43		1	a,b,c,d	(siehe Lemma 14.35)	a,b,ab,c,abc,abd,bcd,abcd	(14.35)	14.35
32.44		1				(16.6),(16.12),(16.13)	9.8
32.45		1				(16.13)	9.8
32.46		1	a,b,c,d	a^2=b^2= c^2= d^4=e, d^{-1}ad= ab, d^{-1}bd=bc	a,b,c,d,d^2,da,db	(16.6),(16.9)	14.36
32.47		1				(16.6)	9.6
32.48		1	a,b,d	a^8=b^2=e, d^2=.a^4,, bab=a^5,d^{-1}ad=ab	a.a^2,a^4,d,da		14.37
32.49	DH(16)	1	a,d	a^{16}=d^2 =e,dad=a^{-1}	d,da,da^3	(16.12)	14.6

Tabelle 4:

1	2	3
Grp-Nr	**Grp-Bez**	**[Co-Mo 1]**
21. 2	SPC(7,3;2)	–
22. 2	DH(11)	D_{11}
24. 4	A_4 x Z_2	C_2 x A_4
24. 5	GDH(6,2)	C_2 x D_6
24. 6	SPC(12,2;7)	C_3 x D_4
24. 7	Q X Z-,	C_3 x Q
24. 8	SPC(12,2;5)	C_4 x D_3
24. 9	GDC(6,2)	C_2 x <2,2,3>
24.10	DH(12)	D_{12}
24.11	S_4	S_4
24.12	–	<2,3,3>
24.13	GDCH(6)	(4,6|2,2)
24.14	SPC(3,8;2)	<2,2,3>
24.15	DC(12)	<2,2,6>
26. 2	DH(13)	D_{13}
27. 4	–	(3,3|3,3)
27. 5	spc(9,3;7)	–
28. 3	DH(14)	D_{14}
28. 4	DC(14)	<2,2,7>
30. 2	SPC(15,2;4)	C_3 x D_5
30. 3	SPC(15,2;11)	C_5 x D_3
30. 4	DH(15)	D_{15}

Die Originalarbeit enthält an diesen Stelle einen
Auszug aus H.M.S. Coxeter/ W.O.J. Moser :
„Generators and relations for discrete groups " Seite 134 und 135 :
sowie einen:
Auszug aus M. Hall+ J.K. Senior : "The groups *of* order 2^n , n < 6 "

Anhang 2: Computerprogramme

1. Das Programm CLASS5 zur Untersuchung der Gruppe Z_2^5

Sei $G = Z_2^5 = \langle a_i \mid a_i^2 = e\ ;1 \leqslant i \leqslant 5\rangle$ und $B = \{a_i \mid 1 \leqslant i \leqslant 5\}$. Dann ist B eine Basis von G.

Sei $\varphi_0 : B \longmapsto G$ eine Abbildung. Dann läßt sich φ_0 genau dann zu einem Automorphismus φ von G fortsetzen, wenn gilt:

$\varphi_0(a_1) \in G - \{e\}$ und $\varphi_0(a_i) \in G - \langle a_1,.., a_{i-1}\rangle$ $(2 \leq i \leq 5)$. Dadurch die die Gruppe Aut(G) eindeutig bestimmt. Es ist $|\mathrm{Aut}(G)| = \prod_0^4 i\ (32 - 2^i) = 9.999.360$.

Sei H ein CES von G. Dann enthält H eine Basis $\underline{B}$ von G.

Da alle Basen von G isomorph sind, ist $\underline{B}$ isomorph zu B.

Daraus folgt insbesondere, daß H isomorph zu einem CES $\underline{H}$ ist, für das $B \subset \underline{H}$ ist.

Ist H ein CES von G, so ist $\min(|H|,|H'|) \leq 15$. Sei $\mathcal{H} = \{H \mid H$ ist CES von $G, B \subset H, |H| \leq 15\}$.

Aus dem obigen folgt nun, daß jedes CES H von G äquivalent zu einem CES $\underline{H} \in \mathcal{H}$ ist.

Wir können uns also bei der Suche nach einer GRR der Gruppe G auf die Untersuchung der CES aus der Menge $\mathcal{H}$ beschränken.

Ist $n \in \mathbb{N}$, so sei $\mathcal{H}_n = \{H \in \mathcal{H} \mid |H| = n\}$.

Für $5 \leq n \leq 15$ ist dann : $|\mathcal{H}_n| = \binom{26}{n-5}$

Damit ergeben sich die Werte:

$|\mathcal{H}_5| = 1$, $|\mathcal{H}_6| = 26$, $|\mathcal{H}_7| = 325$, $|\mathcal{H}_8| = 2600$, $|\mathcal{H}_9| = 14.950$, $|\mathcal{H}_{10}| = 65.780$, $|\mathcal{H}_{11}| = 230.230$.

Wegen der großen Zahl der Automorphismen von G und der großen Zahl der zu untersuchenden CES ergaben sich Schwierigkeiten hinsichtlich der Speicherkapazität der Computers und hinsichtlich der Rechenzeit.

Das Programm wurde am Computer des **Hahn-Meitner Instituts Berlin** durchgeführt. Für die Ermöglichung der Benutzung der Rechenanlage und die Unterstützung bei der Erstellung des Programms sei hier **Herrn Dipl. math. M. Ecker** und **Herrn Dipl. phys. K. Ullmann** gedankt. Die Rechenzeit des Programms betrug ca. 3 Stunden.

1.1 Die Arbeitsweise des Programms CLASS5

Die Menge der Gruppenelemente von G stellen wir durch die Zahlenmenge $I=\{i|1\leq i\leq 32\}$ dar, so daß $e = 1$ und $a_i = i+1$ ($1 \leq i\leq 5$) ist.

Die CES H lassen sich dann als geordnete Zahlenmengen auffassen. Durch die lexikographische Ordnung wird innerhalb der der Mengen $\mathcal{H}_n$ ($5\leq n\leq 15$) eine vollständige Ordnung induziert. Diese Ordnung sei mit "<" bezeichnet.

Ist $H \in \mathcal{H}_n$, so ist es wegen der großen Zahl von Automorphismen von G unmöglich, zu untersuchen, ob H isomorph zu einem $\underline{H} \in \mathcal{H}_n$ mit $\underline{H} < H$ ist. Wir beschränken uns deshalb darauf $K = \min_{<}\{ \varphi[H] \mid \varphi\in Aut(G,B)\}$ zu bestimmen. Da $|Aut(G,B)| = 5! = 120$ ist, ist dies im Computerprogramm mit vertretbarem Zeitaufwand möglich.

Ist $H = [i_j \mid 1 \leq j \leq n\}$, so sei $H_m= \{i_j \mid 1\leq j\leq m\}$ für $5 \leq m \leq n$.

Sei $p(H) = \min \{\min \{k \mid \underline{H}_k < H_k\}, n+1\}$. Ist $p(H) \leq n$, so ist $\underline{H} < H$.

Also ist dann $\underline{H}$ isomorph zu H und $\underline{H} < H$.

Wir bestimmen dann das nächste zu untersuchende $\underline{H}$ durch $\underline{H} = H_{k-1}\cup\{i_k+j|1\leq j\leq n-k+1\}$. Ist $i_k+n-k+1 >15$, so erhöhen wir i_{k-1} um 1 usw. Man überlegt sich leicht, daß alle CES H^* mit $H\leq H^*<\underline{H}$ isomorph zu einem vor H kommenden CES sind. Ist $p(H) = n+1$, so suchen wir ein $\varphi \in Aut(G,H)$. Zunächst bestimmen wir die Eckengrade der Ecken $x \in H$ im Graphen $Y = X(G,H)|_H$. Diese seien mit $\rho(x)$ bezeichnet. Für $i \in N_0$, sei $R_i(H) = \{x\in H| \rho(x) =i\}$. Sei $A(H) = \{\varphi \in Aut(G) \mid \varphi(a_i) \in R_{\rho(a_i)}(H) , (1\leq i\leq 5)\}$. Wir bestimmen nun alle Mengen $\varphi(H),(1\leq i\leq 5)$. Ist $\varphi(H) = H$ für ein $\varphi \in A(H)$, so ist $a(G,H) = |Aut(G,H)|\geq 2$. Dann untersuchen wir das nächste auf H folgende GES .

Ist' ^ Jji3 t H für alle <p -6 A(H) , so ist wegen Aut(G,H) C A(a(G,H) = 1 . Dann wird ff ausgedruckt.

Auf diese Weise werden der Reihe nach die Mengen X_n , $n = 5,6,...,15$ untersucht. Ist ein H gefunden mit $a(G,H) = 1$, so brechen wir das Programm ab. Dies war bei $n = 12$ der Fall.

1.2 Programmbeschreibung CLASS5

Das Programm gliedert sich in die folgenden Abschnitte:

A) Einspeicherung der Gruppenelemente

B) Berechnung der Produktmatrix

1) Erzeugung eines neuen H

2) Prüfung,ob H zu einem bereits untersuchten ES isomorph ist

a)Permutation der Basiselemente

b)Erzeugung von F;

c) Bestimmung von p

3) Prüfung,ob es einen nicht trivialen Automorphismus $\varphi \in Aut(G,H)$ gibt.

In Abschnitt A) wird jedem $x \in G$ ein 5-Tupel zugeordnet, das die Exponenten angibt, mit denen die Elemente der Basis B in x vorkommen.

In Abeschnitt B) wird die Gruppentafel, die hier Produktmatrix genannt wird, berechnet.

In Abschnitt 1) wird jeweils mit dem-in Abschnitt 2c) bestimmte Wert p = p(H) ein neues CES erzeugt.

In Abschnitt 2) wird die Gruppe Aut(G,B) auf H angewendet. Die Automorphismen aus Aut(G,B) werden hier als triviale Automorphismen bezeichnet. Ein CES H wird trivial genannt, wenn $Aut(G,B) \cap Aut(G,H) \neq Q$ ist.

In Abschnitt 3) wird, die Gruppe A(H) auf H angewendet. Dazu wird das Unterprogramm PRÜFH2 benutzt. Zunächst werden die Eckengrade im Graphen $X(G,H)|_H$ bestimmt. Dann werden die Mengen $R_i(H)$ bestimmt. Anschließend wird die Gruppe A(H) erzeugt. Schließlich werden die Mengen φ [H], $\varphi \in A(H)$ gebildet und mit H verglichen.

2. ZU DEN WEITEREN COMPUTERPROGRAMMEN

Bei einigen Gruppen ist es sehr mühselig, wenn nicht gar unmöglich, auf manuelle Weise ein RS der G-Klassen zu bestimmen. Dies ist insbesondere bei solchen Gruppen der Fall, bei denen es einen Orbit von Aut(G) gibt, der fast alle Gruppenelemente enthält. In einigen solcher Fälle wird ein RS der C-Klassen und der Werte a(G,H) mit einem Computerprogramm bestimmt. Bevor wir die Programme beschreiben, erläutern wir die Arbeitsweise der Programme.

2.1 Die Arbeitsweise der Programme

Ist G eine zu untersuchende Gruppe, so sei *H* die Menge der CES von G .

Sei G^+ eine Menge, so daß gilt:

$G = G^+ \cup (G^+)^{-1}$ und $G^+ \cap (G^+)^{-1}=\{x \in G] x^2 = e \}$.

Ist $H \in \mathit{H}$, so sei $H^+ = H \cap G^+$ und.m(H) = $|H^+|$.

Die Menge der Gruppenelemente stellen wir so durch die

Menge $I = \{i|1 \leq i \leq o(G)\}$ dar, daß e = 1 ist, und es ein $k \in I$ gibt, so daß $G^+=\{i|1\leq i \leq k\}$ ist.

Ist G eine abelsche Gruppe, so fordern wir zusätzlich, daß es ein $x \in I$ gibt, so daß die Menge $\{i|\ 2\leq i\leq x\}$ eine Basis von G ist. Ist $H \in \mathit{H}$, so sei $M(H) = \{i \mid 1\leq i \leq m(H)\}$.

Die $H \in \mathit{H}$ stellen wir durch geordnete m(H)-Tupel (i_j), $j \in H$ dar,

so daß gilt $H^+ = \{i_j \mid 1 \leq i \leq m(H)\}$. Dann ist $2 \leq i_j \leq k$ für alle $j \in M(H)$.

Ist $m \in IN$, so liefert die lexikographische Ordnung eine vollständige Ordnung innerhalb der m-Tupel. Diese sei mit $\leq$ bezeichnet.

Sind H, $H^* \in \mathit{H}$ und (i_j), $j \in M(H)$ die zugehörigen Tupel, so sei $H \leq H^*$ genau dann, wenn

a) $m(H) < m(H^*)$ ist, oder

b) $m(H) = m(H^*)$ und …..

Dadurch wird in der Menge *H* eine vollständige Ordnung definiert.

……………………………………………

2.2 Beschreibung der Programme

Die Programme gliedern sich in folgende Abschnitte:

1. Einspeicherung 'der Gruppenelemente
2. Berechnung der Produktmatrix der Gruppe
5. Erzeugung der Automorphismen
4. Erzeugung eines neuen H
5. Bestimmung von p

In Abschnitt 1 wird ausgehend von einer Basis der Gruppe jedem Gruppenelement ein Tupel zugeordnet, das die Exponenten angibt, mit denen die Elemente der Basis im Element vorkommen. In Abschnitt 2 wird die Gruppentafel, die hier Produktmatrix genannt wird, berechnet. In Abschnitt 3 werden die Automorphismen der Gruppe erzeugt. In Abschnitt 4 wird ausgehend von dem in Abschnitt 5 bestimmten Viert p = n(H) ein neues CES H erzeugt. In Abschnitt 5 werden die Vierte p = n(H) und _a(H) = anz2 berechnet.

Literatur

Lehrbücher:

[Co-Mo 1] Coxeter,H.S.M./Moser,W.O.J.: Generators and relations for discrete groups. Springer Verlag, Berlin 1965

[Ha-Se 1] Hall, M./Senior J.K.: The groups of order 2^n, $n \leqslant 6$., New York 1964

[Ko 1] Kochendörffer, R. : Group theory, Mc Graw-Hill, London 1970

Abhandlungen:

[Ch 1] Chao, C.Y.: On a theorem of Sabidussi, Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), 291 - 292

[Fr 1] Frucht, B.: Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe., Compositio Math. 6 (1936), 639

[Im 1] Imrich, W.: Graphen mit transitiver Automorphismengruppe. Monatshefte für Mathematik 73(1969), 341 -347

[Im 2] Imrich, W: Graphs with transitive Abelian automorphism Group Coll. Math. Soc. Janos Bolai 4, Balatonfüred 1969

[Im 3] Imrich, W. : On produkts of graphs and regular groups. Israel J. of Math. Vol 11 No 3 (1972), 258 - 264

[Im 4] Imrich, W.: On graphical regular representations of groups. Coll. Math. Soc. Janos Bolai 10, Keszthely 1973

[Im 5] Imrich, W. : On graphs with regular groups. J. of Comb. Theory Vol.19 No. 2(1975), 174 - 180

[Im 6] Imrich, W. : Graphical regular representations of groups of odd order. (erscheint demnächst)

[Im-Wa 1] Imrich, W./ Watkins M. E. : On graphical regular representations of cyclic extensions of groups. Pacific J. of Math. 55 (1974), 461 - 477

[Im-Wa 2] Imrich, W./ Watkins M. E. : On automorphism groups of Cayley-graphs. (erscheint demnächst)

[Ju 1] Jung, H. A.: Persönliche Mitteilung

[McA 1] Mc Andrews, M. H. : On graphs with transitive automorphism groups. Notices Amer. Math. Soc. 12 (1965), 575

[No-Wa 1] Nowitz, L. A./Watkins M. E. : Graphical regular representations of non-Abelian groups I.,
Canadian J. of Math. 6 (1972), 992 -1008

[No-Wa 2] Nowitz, L. A./Watkins M. E. : Graphical regular representations of non-Abulien groups II.,
Canadian J. of Math. 6 (1972), 1000 -1018

[No 1] Nowitz,L. A. : On the non-existence of graphs with transitive generalized dicyclic groups.
J.of Comb. Theory 4 (1963), 49 - 51

[Sa 1] Sabidussi, G. : On a class of fixed-point-free graphs.,
Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), 800 - 804

[Sa 2] Sabidussi, G. : Graph multiplication.,
Mathematische Zeitschrift 72 (1960), 446 - 457

[Sa 3] Sabidussi, G. : Vertex transitive graphs.,
Monatshefte für Math. 68(1964), 426 - 438

[Wa 1] Watkins,M. E.: On the action of non-abelian groups on graphs
J. of Comb. Th. 11 (1971), 95 - 104

[Wa 2] Watkins,M. E.: On graphical regular representations of C_nxQ.
Proc. Conf. Western Michigan University 1972

[Wa 3] Watkins, M. E. :Graphical regular representations of alternating, symmetric and miscellaneous small groups,
Aequat. Math. 11 (1974), 40 - 50

[Wa 4] Watkins, M. E. :The State of the GRR-Problem.
Proc. of the second Czechoslovakian Conf. on graph theory, June 1974

[Wa 5] Watkins, M. E. : Graphical regular representations of free products of groups.(erscheint demnächst)

[Wa-No 1] Watkins, H. E./Nowitz L. A. : On graphical regular representations of direct products of groups
Monatshefte für Math. 76 (1972), 168 - 171

INDEX

A

A(G,H) · 16, 17, 24, 26, 32, 33, 58
ARR · 18, 29, 30, 72, 73, 74, 78, 82, 83, 89, 90, 91, 92
Aut(G,H) · 16, 17, 18, 21, 24, 25, 26, 29, 30, 31, 32, 33, 59, 61, 63

B

Block · 14, 55
Blocksystem · 14, 48, 57

C

Cayleyerzeugendensystem · 15
Cayleygraph · 15, 17
Cayley-Index · 6, 7, 8, 18
Cayleymenge · 15, 20
Cayley-Zahl · 31
CES · 15, 19, 31, 32, 33, 34, 75, 76, 77, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86
CG · 15, 18, 19, 36, 37, 49, 72
Chao,1964 [Ch 1] · 5, 47
C-Klasse · 32, 33, 34, 74, 75, 76, 79, 80, 81, 84
CM · 15, 16, 19, 20, 22, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 75, 79, 82, 85
Coxeter/Moser,1965 [Co-Mo 1] · 13

D

DH-Gruppe · 12
direktes Produkt · 38, 39
dizyklische Gruppe · 6, 10, 11

E

Erweiterung · 7, 10, 38, 39, 40, 41, 44, 49, 50, 51, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71

F

Frucht,1936 [Fr 1] · 5

G

GDC-Gruppe · 5, 7, 10, 11, 12, 13, 30, 37, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 66, 67, 72, 95, 96
GDCH-Gruppe · 12, 13, 30
GDH-Gruppe · 11, 12, 13, 40
GQ-Gruppe · 11, 43, 44, 45, 46, 72, 95, 96
GRD · 14

H

Hall/Senior,1964 [Ha-Se 1] · 13

I

Imrich,1969 [Im 2] · 74
Imrich,1973 [Im 3] · 74, 78
Imrich,1973 [Im 4] · 19, 24, 25, 27, 72
Imrich,1975 [Im 5] · 14, 25, 29, 48, 51
Imrich,1976 [Im 6] · 6
Imrich/Watkins,1974 [Im-Wa 1] · 9, 53, 69, 70
Imrich/Watkins,1976 [Im-Wa 2] · 72, 78, 79, 89, 91, 95
Imrich/Wtkins,1974 [Im-Wa 1] · 48
inv(x) · 14, 40
isovalenter Graph · 52, 53, 54

J

Jung,Persönliche Mitteilung [Ju 1] · 52

K

Klasse Nm,n · 49, 55
Klasse Qm,n · 49, 50
Kochendörffer,1970 [Ko 1] · 12, 22

L

Linkstranslation · 16

M

Mc Andrews,1965 [McA 1] · 47, 74
most rigid Representation · 18
MRR · 6, 7, 18, 33, 34, 49, 50, 56, 75, 78, 79, 80, 81, 84

N

n/2-GRR · 20
Nowitz,1963 [No 1] · 5, 47
Nowitz/Watkins,1972 [No-Wa 1] · 6, 10, 27, 29, 70
Nowitz/Watkins,1972 [No-Wa 2] · 6

O

Orbit · 31, 68, 79, 83, 84
Ouaternionengruppe · 11

P

P-Partition · 52

Q

Quotientengraph · 21

R

Relation · 20, 21, 33
Repräsentantensystem · 33, 34, 48, 55, 57
Repräsentation · 10

S

Sabidussi,1958 [Sa 1] · 6, 15, 18
Sabidussi,1964 [Sa 3] · 5, 15, 22, 47
semidirektes Produkt · 12, 30, 38, 39, 40, 59, 60, 65, 67, 68, 69
SPC-Gruppe · 12
Stabilisator · 9, 14

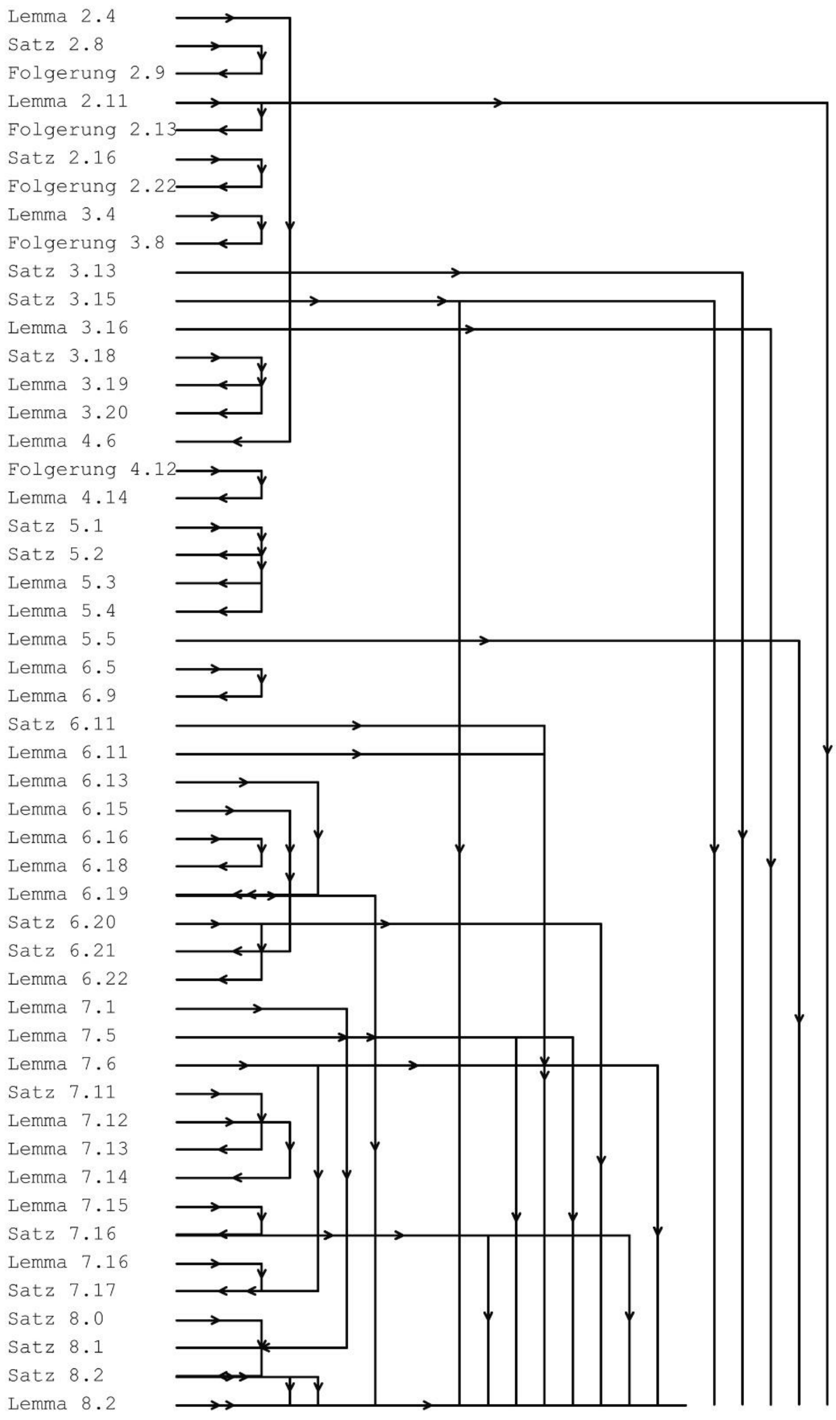
W

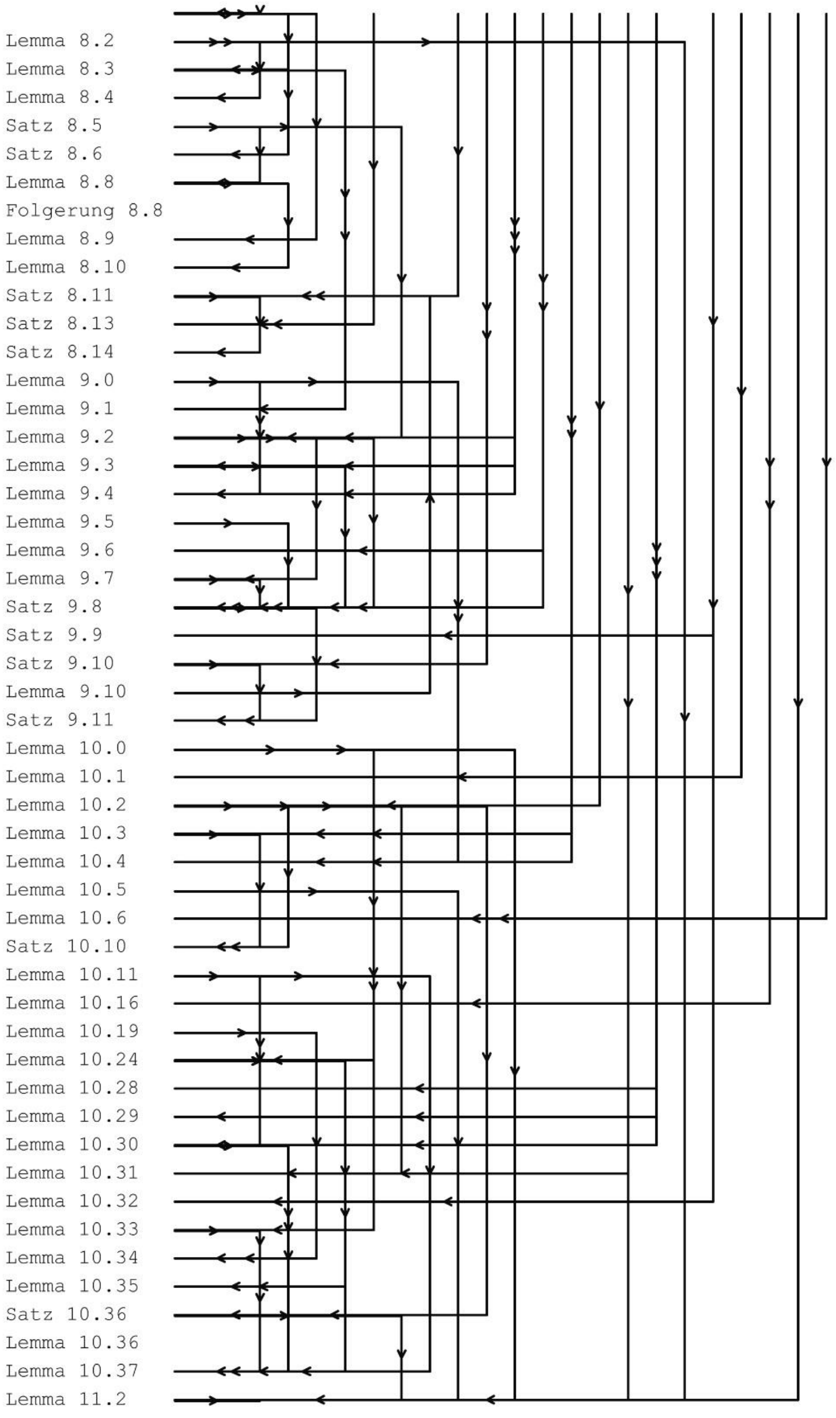
Watkins,1971 [Wa 1] · 5, 17, 45, 47, 52
Watkins,1972 [Wa 2] · 18, 78, 93
Watkins,1974 [Wa 3] · 6
Watkins,1976 [Wa 5] · 22

X

X(n · 19, 20, 77
X|Un · 19

Beweisstruktur




Lemma 8.2
Lemma 8.3
Lemma 8.4
Satz 8.5
Satz 8.6
Lemma 8.8
Folgerung 8.8
Lemma 8.9
Lemma 8.10
Satz 8.11
Satz 8.13
Satz 8.14
Lemma 9.0
Lemma 9.1
Lemma 9.2
Lemma 9.3
Lemma 9.4
Lemma 9.5
Lemma 9.6
Lemma 9.7
Satz 9.8
Satz 9.9
Satz 9.10
Lemma 9.10
Satz 9.11
Lemma 10.0
Lemma 10.1
Lemma 10.2
Lemma 10.3
Lemma 10.4
Lemma 10.5
Lemma 10.6
Satz 10.10
Lemma 10.11
Lemma 10.16
Lemma 10.19
Lemma 10.24
Lemma 10.28
Lemma 10.29
Lemma 10.30
Lemma 10.31
Lemma 10.32
Lemma 10.33
Lemma 10.34
Lemma 10.35
Satz 10.36
Lemma 10.36
Lemma 10.37
Lemma 11.2

Diplom-Zeugnis

DIE
TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
BERLIN

VERLEIHT MIT DIESER URKUNDE

Herrn Dieter H e t z e l
geboren am 7. Dezember 1946 in Goslar

DEN GRAD

DIPLOM-MATHEMATIKER

NACHDEM DIE DIPLOMPRÜFUNG
IM ORDNUNGSMÄSSIGEN VERFAHREN
ABGELEGT WURDE

BERLIN-CHARLOTTENBURG, DEN 2. November 1977

FACHBEREICH
MATHEMATIK

DER UNIVERSITÄTSPRÄSIDENT
IN VERTRETUNG

Kanzler

DER VORSITZENDE DES
FACHBEREICHSRATS

Zusammenfassendes Urteil über die Übungsarbeiten ---

Gesamturteil sehr gut bestanden

BERLIN-CHARLOTTENBURG, den 2. November 1977

FACHBEREICH
MATHEMATIK

DER VORSITZENDE
DES FACHBEREICHSRATS

Gesamturteile: mit Auszeichnung bestanden, sehr gut bestanden, gut bestanden, befriedigend bestanden, bestanden.
Einzelurteile: sehr gut, gut, befriedigend, genügend.
TU-IB

ZEUGNIS

Herr Dieter H e t z e l

GEBOREN AM 7. Dezember 1946 IN Goslar HAT DIE

DIPLOM-HAUPTPRÜFUNG

IN DER STUDIENRICHTUNG MATHEMATIK
IM ORDNUNGSMÄSSIGEN VERFAHREN ABGELEGT

Urteil über die Diplomarbeit aus dem Gebiet:

Graphentheorie	sehr gut

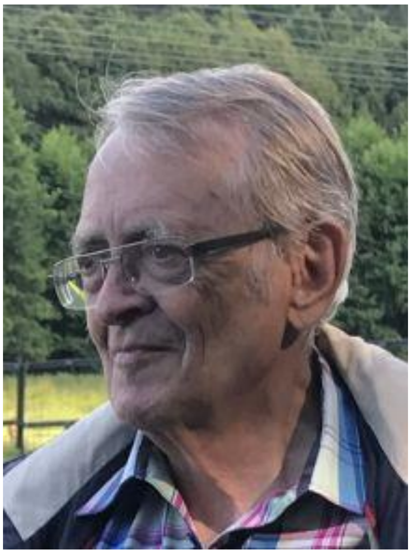
Urteile über die nachgewiesenen Kenntnisse in den Prüfungsfächern:

Reine Mathematik	sehr gut
Angewandte Mathematik	genügend
Spezialgebiet der Mathematik	sehr gut
Nebenfach: Physik	gut
---	---
---	---
---	---
---	---
---	---
---	---

Lebensläufe der für diese Arbeit relevanten Professoren

Professor Jung betreute die Arbeit. Die Professoren Imrich und Watkins arbeiteten auf dem Gebiet der regulären graphischen Darstellung von Gruppen und erzielten wesentliche Ergebnise, die in dieser Arbeit verwendet werden.

Prof. Dr. Heinz Adolf Jung[1]



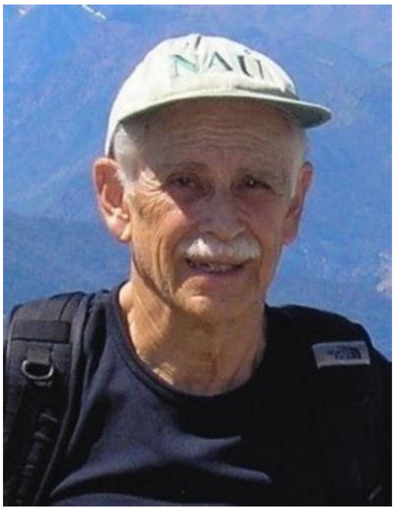
Heinz Adolf Jung wurde am 17. November 1936 in Solingen geboren. Im Jahr 1958 schloss er seine Schulausbildung am Fichte-Gymnasium in Krefeld mit dem Abitur ab. Danach begann er ein Studium der Naturwissenschaften für das Lehramt in Physik und Mathematik in Köln. Schon zu Beginn seines Studiums begann er sich verstärkt für die mathematischen Disziplinen zu interessieren. Er bewarb sich deshalb auch um ein Promotionsstipendium, was auch erfolgreich war. Er promovierte in Mathematik bei Klaus Wagner, einem deutschen Pionier der Graphentheorie, auf eben diesem Gebiet. Im Jahr 1964 legte H. A. Jung das Staatsexamen des Lehramtsstudiums ab, ohne aber den Weg als Lehrer ernsthaft anzustreben. Nach seiner Promotion erhielt er ein Habilitationsstipendium und habilitierte sich 1968 mit einem graphentheoretischen Thema. Seit 1969 bis zu seinem altersbedingten Ende seiner Tätigkeit im Jahr 2001 arbeitete H. A. Jung als Hochschullehrer auf dem Gebiet der Algebra und Graphentheorie an der Technischen Universität Berlin. Dort war er engagiert in Lehre und Forschung. Unter anderem war er Mitgründer des 1991 eingerichteten Berlin-weiten Graduiertenkollegs „Algorithmische Diskrete Mathematik“. Er führte zahlreiche Doktoranden, darunter mehrere ausländische Gäste, zur Promotion. Zahlreiche Auslandsaufenthalte in den USA, Kanada, Thailand und China zeugen von der Wertschätzung seiner Arbeit über die Grenzen Deutschlands hinaus. Hervorzuheben ist sein Engagement in diversen Gremien und Berufungskommissionen zur Neuorganisation der mathematischen Fachbereiche und Institute an den Universitäten der damals „neuen Bundesländer“. Auch nach dem Beenden seiner beruflichen Laufbahn hielt er den Kontakt zu seiner Universität aufrecht und blieb auch der Berliner Mathematischen Gesellschaft treu. H. A. Jung verstarb am 4. August 2021 im Alter von 84 Jahren.

[1] Quelle: https://www.math.berlin/nachrufe/heinz-adolf-jung.html

Prof. Dr. phil. Wilfried Imrich [2]

Wilfried Imrich wurde 1941 in Wien geboren, ist verheiratet und Vater zweier Kinder. 1959 begann er an der Universität Wien Mathematik und Physik zu studieren, 1964 arbeitete er am IBM Lab in Wien (Filtersimulation) und 1965 schloss er sein Studium mit einer Arbeit über Gitter und Volumen (Geometrie der Zahlen) ab. Von 1965 bis 1973 war er studentischer Assistent, Assistenzprofessor und außer-ordentlicher Professor an der Technischen Universität Wien. Seit 1973 ist er ordentlicher Professor für Angewandte Mathematik an der Montanuniversität Leoben. 1966/67 und 1969 hatte er außerdem die Position eines Assistenz-professors an der State Career University of New York in Albany inne, verbrachte das Herbstsemester 1969/70 an der Lomonosow-Universität in Moskau und war wiederholt Gastdozent/Forscher an Universitäten in Syracuse (NY).), Montreal, Vancouver, Waterloo (Kanada) und Melbourne (Australien). Er war Betreuer für die Doktorarbeit. Studierende der Ingenieurwissenschaften und Mathematik haben mehr als 120 wissenschaftliche Arbeiten und drei Forschungsmonographien veröffentlicht. Zu seinen Forschungsinteressen gehören die Struktur endlicher und unendlicher Graphen, Graphautomorphismen, kombinatorische Gruppentheorie und Graphalgorithmen. Sein Interesse gilt auch der Zusammenarbeit mit Stahl- und produzierenden Unternehmen, was zu mehreren Projekten, Diplomarbeiten und Dissertationen geführt hat. Er ist Mitglied des Beirats der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, war von 2001 bis 2003 Dekan des Graduiertenstudiums und von 1984 bis 1995 Leiter des Rechenzentrums der Montanuniversität Leoben.

Prof. Dr. Mark Watkins[3]



Mark Watkins wuchs in der Nähe von Philadelphia auf. Er erwarb seinen Ph.D. in Mathematik an der Yale University '64 nach seinem AB am Amherst College '59. Mark kam 1968 an die Syracuse University und war dort bis 2013 ordentlicher Professor für Mathematik. Mit seinem Syracuse-Kollegen Jack Graver schrieb Mark „Combinatorics with Emphasis on the Theory of Graphs“ und „Locally Finite, Planar Edge-Transitive Graphs“ und mehr. Er schrieb kürzlich den Text „Passage to Abstract Mathematics“ mit einem anderen Syracuse-Kollegen, Jeffrey Meyer. Mark liebte es zu reisen und bereiste die ganze Welt, oft um seine Arbeit zu unterstützen. Er sprach fließend Französisch und Deutsch und lernte Italienisch. Sein Lernhunger war grenzenlos. Nach seiner Pensionierung meldete er sich weiterhin für Nebenkurse in Geschichte und Kunst an. Als lebenslanger begeisterter Naturliebhaber hegte Mark bis zu seinem Tod eine besondere Vorliebe für Kanufahren, Kajakfahren, Camping, Radfahren, Schwimmen und Wandern.

[2] Quelle: http://imrich.at/career/ (Text in Englisch)
[3] Quelle: https://www.legacy.com/us/obituaries/syracuse/name/mark-watkins-obituary?id=54985417 (Text in Englisch)